

На правах рукописи



Гаджиев Дмитрий Александрович

**Взаимодействие вихревых течений с твёрдыми
поверхностями и акустическими возмущениями**

Специальность 01.02.05 —
«Механика жидкости, газа и плазмы»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Жуковский — 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: **Гайфуллин Александр Маркович**,
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН,
ФГУП «Центральный
аэрогидродинамический институт
имени профессора Н. Е. Жуковского»,
главный научный сотрудник.

Официальные оппоненты: **Исаев Сергей Александрович**,
доктор физико-математических наук,
профессор,
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский
государственный университет гражданской
авиации»,
заведующий лабораторией;

Петров Александр Георгиевич,
доктор физико-математических наук,
профессор,
ФГБУН «Институт проблем механики
им. А. Ю. Ишлинского» РАН,
ведущий научный сотрудник.

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова».

Защита состоится 9 декабря 2021 г. в 15 часов на заседании Диссертационного совета Д 002.073.03 при ФИЦ ИУ РАН по адресу: 119333, Москва, ул. Вавилова, д. 40, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ВЦ ФИЦ ИУ РАН по адресу: 119333, Москва, ул. Вавилова, д. 42, а также на сайте https://www.frccsc.ru/diss-council/00207303/diss/list/gadjiev_da.

Автореферат разослан

2021 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.073.03,
доктор физико-математических наук



С. И. Безродных

Общая характеристика работы

Работа посвящена исследованию эволюции вихревых течений вблизи твёрдых тел и взаимодействию вихрей с акустическими возмущениями.

Актуальность темы исследования определяется распространённостью вихревых течений в природе и технике. Вихри являются структурными единицами турбулентного течения жидкости или газа, участвуют в формировании подъёмной силы крыла самолёта, возникают в океанах и атмосфере Земли.

Ряд практически важных задач связан с эволюцией вихревых течений жидкости или газа вблизи твёрдых поверхностей. Существенно вихревым является течение в вязком пограничном слое вблизи твёрдой поверхности. Отрыв пограничного слоя, возможный при условии неблагоприятного градиента давления, может приводить к появлению вихрей вдали от твёрдых границ в изначально потенциальном потоке. Аналогично ряд вихревых течений можно создать движением твёрдых тел в вязкой среде.

Другие актуальные задачи возникают при распространении через область вихревого течения сжимаемого газа акустических волн. Среди них проблемы рассеяния, излучения и поглощения звука вихревыми и турбулентными течениями, акустической диагностики вихревых течений (определения расположения вихрей на основе картины рассеяния звука), потери устойчивости ламинарных вихревых течений под воздействием звука.

Степень разработанности темы. Аналитическое решение двумерной задачи о диффузии точечного вихря с полем окружной скорости $\Gamma/(2\pi r)$, $\Gamma = \Gamma_0$ при $t = 0$, в рамках уравнений Навье–Стокса несжимаемой жидкости известно с 1912 г. (С. Oseen): $\Gamma/\Gamma_0 = 1 - e^{-r^2/(4\nu t)}$, где ν – кинематический коэффициент вязкости. Для случая пары точечных вихрей с циркуляциями Γ_0 и $-\Gamma_0$ имеется асимптотическое решение при числах Рейнольдса $\Gamma_0/\nu \rightarrow \infty$ (А. М. Гайфуллин, А. В. Зубцов). При наличии твёрдых границ картина существенно иная, что обнаружено на примере лётных испытаний (F. W. Dee, O. P. Nicholas), экспериментов в аэродинамической трубе (J. K. Harvey, F. J. Perry) и численного моделирования в рамках уравнений Навье–Стокса (А. J. Peace, N. Riley; Z. C. Zheng, R. L. Ash; L. Türk и др.) пары прямолинейных вихревых трубок над бесконечной прямолинейной твёрдой поверхностью при больших числах Рейнольдса. Происходит глобальный отрыв пограничного слоя от поверхности, нестационарный из-за перемещения вихрей. В результате траектории движения вихрей $\pm x_v(t)$, $y_v(t)$ существенно отличаются от траекторий $x_v^{-2} + y_v^{-2} = \text{const}$ при безотрывном течении в рамках уравнений Эйлера ($\nu = 0$). Явление отрыва пограничного слоя известно с 1904 г. (L. Prandtl); существует теория стационарного отрыва, учитывающая

сильное взаимодействие (обратное влияние пограничного слоя на внешний поток) (В. В. Сычёв). Для нестационарного отрыва известен критерий его возникновения (N. Rott, W. R. Sears, F. K. Moore), но согласованная теория на данный момент не построена.

Поле скорости точечного вихря обладает бесконечной кинетической энергией и не может существовать в неограниченном пространстве, но может быть создано в ограниченной области с помощью равномерного вращения кругового цилиндра начиная с некоторого момента $t = 0$. Решение такой задачи в рамках уравнений Навье–Стокса несжимаемой жидкости вдали от цилиндра $\Gamma/\Gamma_0 = e^{-r^2/(4\nu t)}$ переходит в поле точечного вихря при $r/\sqrt{\nu t} \rightarrow 0$. В случае сжимаемого газа существует стационарное решение для вихря, который мог бы возникнуть за бесконечно большое время (L. Mack). Обобщение нестационарного решения на случай сжимаемого газа до сих пор не было известно.

Теория взаимодействия акустических волн с течением газа в рамках линеаризованных уравнений Эйлера разработана в середине XX в. (Д. И. Блохинцев, M. J. Lighthill). С 1980-х гг. известны решения задач рассеяния плоской волны $\exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t))$ парой точечных вихрей (К. Tanaka, S. Ishii), вихревым кольцом (T. Kambe, U. M. Oo; M. S. Howe; В. Ф. Копьёв, Е. А. Леонтьев), вихрем Хилла (В. В. Климов, В. Л. Прозоровский) в борновском приближении, в котором поле возмущений рассеянной волны удовлетворяет волновому уравнению. Задача рассеяния плоской волны вихрем с ненулевой циркуляцией в рамках волнового уравнения является некорректно поставленной из-за медленного затухания поля скоростей на бесконечности (T. Colonius и др.; R. Berthet, F. Lund; В. Ф. Копьёв, И. В. Беляев). Все попытки решения данной задачи были основаны на некорректных подходах (В. Ф. Копьёв, И. В. Беляев) и давали одно из двух противоречивых выражений: цилиндрическую волну $\exp(i(kr - \omega t))/\sqrt{kr} f(\theta)$ с особенностью $f(\theta) \rightarrow \infty$ при $\theta \rightarrow 0$ (Л. П. Питаевский; A. L. Fetter; J. H. Ferziger; S. O'Shea; S. M. Candel; A. Л. Фабрикант; В. Ф. Копьёв, Е. А. Леонтьев; T. Colonius и др.) либо незатухающую волну (П. В. Саков; R. Ford, S. G. Llewellyn Smith; M. S. Howe). Гладкое решение, вдали от области малых углов близкое к решению Л. П. Питаевского, существует для случая вихря с циркуляцией $\Gamma = \Gamma_0 e^{-r/L}$ (R. Berthet, F. Lund). Затухающее решение, близкое в некоторой области к решению П. В. Сакова, до сих пор не было известно.

Целью данной работы является выявление механизмов и определение характеристик диффузии и генерации вихрей в вязкой среде в присутствии твёрдых границ и взаимодействия вихрей с акустическими возмущениями на примере двух реализуемых на практике конфигураций.

Для достижения поставленной цели решены следующие задачи:

1. Определение сценариев эволюции пары прямолинейных вихревых нитей с равной по модулю и противоположной по знаку циркуляцией в вязкой несжимаемой жидкости вблизи твёрдой поверхности.
2. Определение асимптотических характеристик течения, возникающего в вязком сжимаемом газе при вращении кругового цилиндра, на больших временах при больших числах Рейнольдса в предположении осесимметричности.
3. Определение асимптотических характеристик взаимодействия плоской акустической волны с цилиндрическим вихрем из задачи 2 в невязком совершенном газе в случае, когда характерные числа Маха малы, а эффективный радиус вихря велик по сравнению длиной волны.
4. Определение асимптотических характеристик взаимодействия плоской акустической волны с вихревой парой вблизи твёрдой поверхности из задачи 1 в невязком совершенном газе в случае, когда характерные числа Маха малы, а расстояние между вихрями и высота вихрей над поверхностью велики по сравнению длиной волны.

Научная новизна:

1. Впервые дано описание локальной структуры нестационарного отрыва пограничного слоя, происходящего при взаимодействии вихрей с твёрдой поверхностью.
2. Впервые построено решение задачи о порождении вихря вращающимся цилиндром с учётом сжимаемости, удовлетворяющее условию затухания возмущений на бесконечности. Обнаружено явление «скачка циркуляции»: в сжимаемом газе с коэффициентом вязкости, зависящим от температуры, внутренний предел внешнего решения для циркуляции скорости в общем случае отличается от значения циркуляции на поверхности цилиндра.
3. Впервые получено решение, включающее в себя в качестве предельных случаев в различных асимптотических областях оба известных решения классической задачи взаимодействия плоской акустической волны с вихревой нитью.
4. Получено решение в дальнем поле задачи взаимодействия течения с акустическими возмущениями нового типа: рассеянная волна, отличная от цилиндрической и удовлетворяющая условию излучению Зоммерфельда.

Теоретическая и практическая значимость:

1. Качественное описание отрыва пограничного слоя в задаче об эволюции вихрей над твёрдой поверхностью может послужить опорой для развития теории нестационарного ламинарного отрыва.

2. Физическая интерпретация обнаруженных эффектов, таких, как «скачок циркуляции» в задаче о порождении вихря, может быть полезной для понимания физики более сложных течений сжимаемого газа с переменной вязкостью.
3. Установленные асимптотические решения для задачи о порождении вихря вращающимся цилиндром и для задачи о взаимодействии звука с цилиндрическим вихрем могут быть использованы для валидации численных методов и интерпретации соответствующих экспериментов.
4. Анализ решения задачи взаимодействия плоской акустической волны с экспоненциально затухающим цилиндрическим вихрем показывает, какое из двух известных решений для случая вихревой нити реализуется в физическом и численном эксперименте.
5. Новый масштаб длины, характерный для решения задачи взаимодействия звука с экспоненциально затухающим цилиндрическим вихрем и превосходящий как длину акустической волны, так и эффективный радиус вихря, определяет минимальный размер области, которую необходимо разрешать в физическом или численном эксперименте.

Методология и методы исследования:

1. Асимптотические методы решения уравнений в частных производных и вычисления интегралов с малым параметром, в том числе метод сращиваемых асимптотических разложений и метод перевала.
2. Методы программ символьной математики.
3. Конечно-объёмные и конечно-разностные алгоритмы численного решения уравнений Навье–Стокса.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Сценарий нестационарного ламинарного отрыва пограничного слоя при взаимодействии вихрей с твёрдой поверхностью.
2. Асимптотическое решение задачи о порождении цилиндрического вихря вращающимся круговым цилиндром в вязком сжимаемом газе на больших временах.
3. Асимптотическое решение задачи рассеяния плоской волны цилиндрическим вихрем с экспоненциально затухающим полем скорости в коротковолновом приближении.
4. Асимптотическое решение в дальнем поле задачи рассеяния плоской волны вихревой парой вблизи твёрдой поверхности.

Достоверность полученных результатов обеспечивается

1. Использованием классических уравнений гидродинамики, уравнений Навье–Стокса и линеаризованных уравнений Эйлера, с применением общепринятых методов интегрирования.

2. Согласованием асимптотических и численных решений в соответствующих областях пространства.
3. Согласованием с хорошо апробированными решениями других авторов в соответствующих пределах и диапазонах параметров.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались соискателем лично на следующих конференциях и семинарах: 58-я, 59-я, 60-я, 61-я, 62-я, 63-я научные конференции МФТИ (г. Жуковский, 2015–2020); XXVII, XXVIII, XIX, XXX, XXXI научно-технические конференции по аэродинамике (п. Володарского, 2016, 2017; д. Богданиха, 2018; п. Володарского, 2019, парк-отель Яхонты, 2020); XVI Международная школа-семинар «Модели и методы аэродинамики» (г. Евпатория, 2016); Международные конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (г. Суздаль, 2018, 2020); XIX Международная конференция по методам аэрофизических исследований (ICMAR 2018, г. Новосибирск, 2018); Седьмая всероссийская конференция с международным участием «Тепломассообмен и гидродинамика в закрученных потоках» (г. Рыбинск, 2019); IX Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (г. Новосибирск, 2020); 11-я международная конференция — школа молодых учёных «Волны и вихри в сложных средах» (г. Москва, 2020); Международная научная конференция по механике «IX Поляховские чтения» (г. Санкт-Петербург, 2021); 25th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (г. Милан, Италия, 2021); семинар по механике сплошных сред под руководством А. Г. Куликовского, В. П. Карликова, О. Э. Мельника, А. Н. Осипцова (г. Москва, НИИ механики МГУ, 12 мая 2021); видеосеминар по аэромеханике ЦАГИ — ИТПМ СО РАН — СПбГПУ — НИИМ МГУ (г. Жуковский, ЦАГИ, 14 сентября 2021).

Личный вклад. Результаты глав 1 и 3 получены соискателем самостоятельно. В главе 2 соискателем получено решение задачи при вращении цилиндра с характерными числами Маха порядка единицы. Решение в случае чисел Маха много больших единицы получено совместно с А. М. Гайфуллиным и А. В. Зубцовым.

Публикации. Основные результаты изложены в 9 печатных изданиях [1–9], рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертации.

Соответствие паспорту специальности. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.02.05 «Механика жидкости, газа и плазмы» по следующим пунктам:

- п. 4: течения сжимаемых сред и ударные волны;
- п. 11: пограничные слои, слои смешения, течения в следе;
- п. 14: линейные и нелинейные волны в жидкостях и газах;
- п. 15: тепломассоперенос в газах и жидкостях;
- п. 18: аналитические, асимптотические и численные методы исследования уравнений кинетических и континуальных моделей

однородных и многофазных сред (конечно-разностные, спектральные, методы конечного объема, методы прямого моделирования и др.).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и 1 приложения. Полный объём диссертации составляет 120 страниц, включая 40 рисунков и 2 таблицы. Список литературы содержит 128 наименований.

Содержание работы

Во **введении** даётся общая характеристика и приводятся данные о публикациях и апробации работы.

Первая глава посвящена численному решению двумерной задачи о паре вихрей с противоположными циркуляциями вблизи бесконечной прямолинейной твёрдой поверхности в вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса [1] с анализом структуры нестационарного отрыва пограничного слоя [2].

В **разделе 1.1** приводится постановка задачи (рис. 1). Решение удовлетворяет двумерным уравнениям Навье–Стокса:

$$u_x + v_y = 0, \quad (1)$$

$$u_t + uu_x + vv_y = -\rho^{-1}p_x + \nu(u_{xx} + u_{yy}), \quad (2)$$

$$v_t + uv_x + vv_y = -\rho^{-1}p_y + \nu(v_{xx} + v_{yy}), \quad (3)$$

где $\rho = \text{const}$, $\nu = \text{const}$. Начальное условие имеет вид суперпозиции полей скорости вихревой пары и её отражения относительно твёрдой поверхности:

$$(u - iv)|_{t=0} = \sum_{k=1}^4 \frac{\Gamma_k}{2\pi i (z - z_k|_{t=0})}, \quad \Gamma_k = (-1)^{k-1} \Gamma_0, \quad (4)$$

$$z_1|_{t=0} = l + ih, \quad z_2 = -\bar{z}_1, \quad z_3 = -z_1, \quad z_4 = \bar{z}_1.$$

Граничные условия при $t > 0$: условия прилипания $u = v = 0$ на твёрдой поверхности $y = 0$, затухания возмущений $u^2 + v^2 \rightarrow 0$ при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ и отсутствия особенностей $|u^2 + v^2| < \infty$. Решение зависит от двух безразмерных параметров: числа Рейнольдса $\text{Re} = \Gamma_0/\nu \rightarrow \infty$ и относительной высоты вихрей $h/l = O(1)$.

В **разделе 1.2** строится решение задачи в главном приближении на малых временах $\sqrt{\nu t}/l \rightarrow 0$. Вдали от центров вихрей и пограничного слоя вблизи твёрдой поверхности справедливы уравнения Эйлера. Решение в каждый момент времени имеет вид аналогичный (4), причём вихри движутся по тем же траекториям, что в идеальной жидкости. В окрестности центра вихря $|z - z_1|/\sqrt{\nu t} = O(1)$ решение аналогично решению задачи о

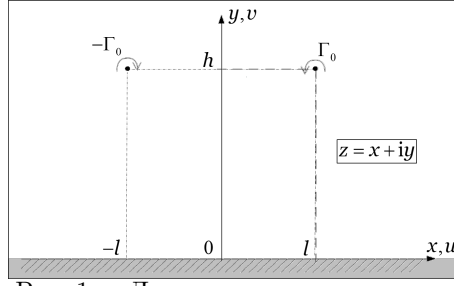


Рис. 1 — Два вихря над плоскостью

диффузии одиночного вихря. В пограничном слое $y/\sqrt{\nu t} = O(1)$ уравнения (2)–(3) переходят в уравнения Прандтля

$$u_t + uu_x + vv_y = -\rho^{-1}p_x + \nu u_{yy}, \quad p_y = 0, \quad (5)$$

с граничными условиями прилипания $u = v = 0$ при $y = 0$, симметрии $u = 0$ при $x = 0$ и сращивания с решением уравнений Эйлера при $y/\sqrt{\nu t} \rightarrow \infty$. Начальное условие – решение задачи Рэлея $u = u_e \operatorname{erf}(y/2\sqrt{\nu t})$, где u_e соответствует (4) при $y = 0$. Уравнения (1), (5) решены численно маршевым методом с помощью неявной абсолютно устойчивой схемы второго порядка точности.

Решение уравнений (1), (5) показывает, что в некоторый момент $t = t_s$ происходит отрыв пограничного слоя: $u_y = 0$ при некотором $x = x_s$, $y = y_s$. Метод решения на временах $t \approx t_s$ и $t > t_s$, когда уравнения (5) несправедливы, описан в **разделе 1.3**. Уравнения (1)–(3) переписываются в переменных завихренности $\Omega = v_x - u_y$ и функции тока ψ ($u = \psi_y$, $v = -\psi_x$):

$$\Omega_t + \psi_y \Omega_x - \psi_x \Omega_y = \nu(\Omega_{xx} + \Omega_{yy}), \quad (6)$$

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = -\Omega. \quad (7)$$

Уравнения (6)–(7) решаются численно в области $0 \leq x \leq x_m$, $0 \leq y \leq y_m$, вне которой завихренность мала. Для уравнения (6) используется неявная абсолютно устойчивая схема метода чередующихся направлений второго порядка точности. Граничные условия: условия прилипания при $y = 0$ (выводится из $\psi_y = 0$), симметрии $\Omega = 0$ при $x = 0$, затухания возмущений $\Omega = 0$ при $y = y_m$ и $\Omega_x = 0$ при $x = x_m$. Уравнение (7) решается с помощью быстрого преобразования Фурье с граничными условиями $\psi = 0$ при $x = 0$ и $y = 0$ и $\psi(z) = -(2\pi)^{-1} \int \Omega(\xi, \eta) \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} d\xi d\eta$ при $x = x_m$ и $y = y_m$.

В **разделе 1.4** приводится описание картины нестационарного отрыва пограничного слоя и эволюции сходящихся с твёрдой поверхности вихревых структур. Орыв пограничного слоя происходит в точке $x =$

$x_s(t)$, $y = y_s(t) > 0$ нулевого трения $u_y = 0$, лежащей на некотором расстоянии от поверхности (рис. 2). Внутренняя часть $y < y_s$ пограничного слоя остаётся присоединённой; внешняя часть $y > y_s$ отходит от твёрдой поверхности и образует спиралевидный завихренный слой (рис. 4). Противоположно завихренный пограничный слой внутри рециркуляционной зоны также терпит отрыв под действием неблагоприятного градиента давления. В некоторый момент рециркуляционная область отделяется от поверхности и далее движется вокруг начального вихря; вдали от поверхности появляется критическая точка (рис. 4б). То же происходит с рециркуляционными областями, возникающими позже.

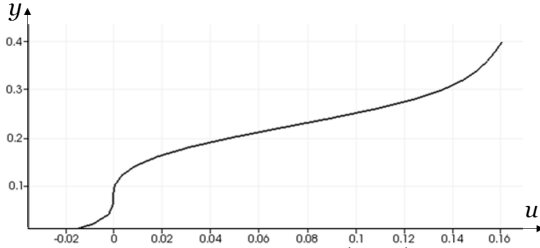


Рис. 2 — Профиль продольной скорости $u(x_s, y)$ в системе координат, связанной с точкой отрыва $x = x_s$, при $l^2(t - t_s)/\Gamma_0 = 26$, $\text{Re} = 8000$, $h = 8$

В разделе 1.5 показано, что отрыв пограничного слоя существенно ускоряет затухание вихрей (рис. 3а). Здесь $\Gamma = \int_{\Omega>0} \Omega dx dy$ учитывает только положительную завихренность в полуплоскости $x > 0$.

Раздел 1.6 иллюстрирует отличие траекторий движения центров вихрей $x_v(t)$, $y_v(t)$ от траекторий вихрей в идеальной жидкости (рисунок 3б). Вместо равномерного движения параллельно поверхности вихри отдаляются от неё, и скорость их движения со временем уменьшается.

Вторая глава посвящена асимптотическому решению задачи о цилиндрическом вихре, образующемся в сжимаемом совершенном газе с линейной зависимостью коэффициентов динамической вязкости и теплопроводности от температуры при вращении бесконечно протяжённого кругового цилиндра [3–5].

В разделе 2.1 приводится постановка задачи (рис. 5). Решение удовлетворяет уравнениям Навье–Стокса:

$$\rho_t + (r\rho v)_r/r = 0, \quad (8)$$

$$\rho(\Gamma_t + v\Gamma_r) = \mu(\Gamma_{rr} - \Gamma_r/r) + \mu_r(\Gamma_r - 2\Gamma/r), \quad (9)$$

$$\rho(v_t + vv_r - \Gamma^2/r^3) = 4/3 \mu(v_{rr} + v_r/r - v/r^2) + 2/3 \mu_r(2v_r - v/r), \quad (10)$$

$$\rho c_p(T_t + vT_r) = p_t + vp_r + \lambda(T_{rr} + T_r/r) + \lambda_r T_r + \quad (11)$$

$$+ \mu \left[(\Gamma_r - 2\Gamma/r)^2/r^2 + 4/3 ((v_r)^2 - vv_r/r + v^2/r^2) \right],$$

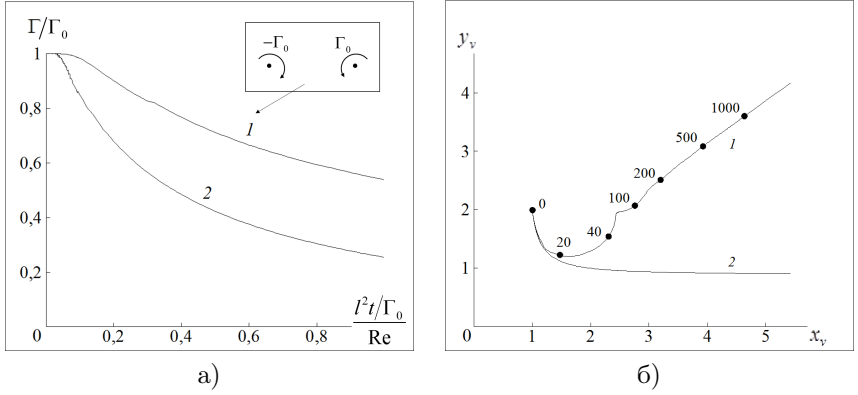


Рис. 3 — а — уменьшение со временем циркуляции Γ правого вихря при $Re = 1000$: 1 — при $h = \infty$, 2 — при $h = 3$; б — траектории движения центра правого вихря $x_v(t), y_v(t)$ при $h = 2$: 1 — в вязкой жидкости при $Re = 1000$ (числами отмечены моменты времени $l^2 t / \Gamma_0$), 2 — в идеальной жидкости

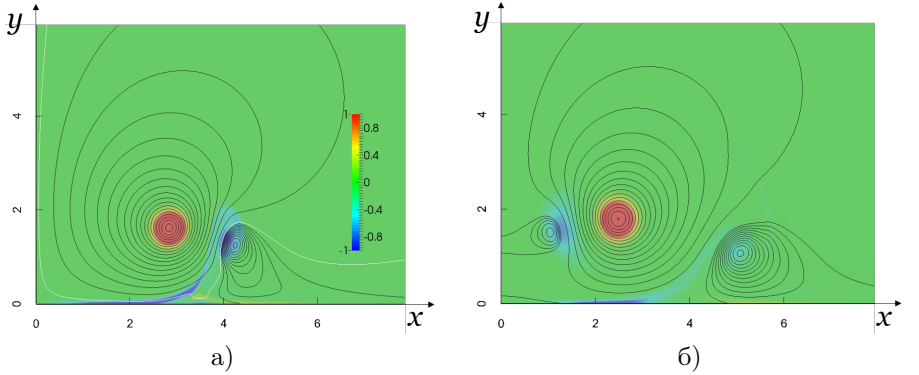


Рис. 4 — Поля завихренности и линии тока при $Re = 8000$, $h = 8$ в моменты времени: а — $l^2(t - t_s) / \Gamma_0 = 36$, б — $l^2(t - t_s) / \Gamma_0 = 90$

где $\Gamma = 2\pi r w$, $\mu / \mu_\infty = \lambda / \lambda_\infty = T / T_\infty$, и уравнению состояния $p = R\rho T$. В момент $t = 0$, а также при $r \rightarrow \infty$, $t > 0$ газ покоится: $\Gamma = 0$, $v = 0$, $\rho = \rho_\infty$, $T = T_\infty$. Скорость вращения и температура поверхности цилиндра поддерживаются постоянными: $\Gamma = \Gamma_*$, $v = 0$, $T = T_*$ при $r = r_*$. Решение зависит безразмерных параметров числа Рейнольдса $Re = \Gamma_* / \nu_\infty \rightarrow \infty$, числа Маха $M_* = \Gamma_* / (r_* c_\infty)$, температурного фактора T_* / T_∞ и числа Прандтля $Pr = \mu_\infty c_p / \lambda_\infty$. Ищется асимптотическое решение на больших временах $\varepsilon_0(t) = r_* / \sqrt{\nu_\infty t} \ll 1$.

В разделе 2.2 определяется решение в области $\tau = r / \sqrt{\nu_\infty t} = O(1)$. Решение для циркуляции представляется в виде $\Gamma / \Gamma_* = \Gamma_e(\tau) + O(1 / \ln \varepsilon_0)$

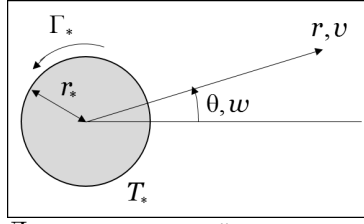


Рис. 5 — Диск, вращающийся в сжимаемом газе

и в главном приближении удовлетворяет линейному уравнению

$$\Gamma_e'' - \frac{\Gamma_e'}{\tau} \left(1 - \frac{\tau^2}{2} \right) = 0, \quad (12)$$

условиям затухания $\Gamma_e \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ и сращивания с решением во внутренней области. Решение имеет вид

$$\Gamma_e = A e^{-\tau^2/4}, \quad (13)$$

где A определяется из условия сращивания.

В разделе 2.3 определяется решение в области $\eta = r/r_* = O(1)$. Решения для циркуляции и температуры представляются в виде $\Gamma/\Gamma_* = \Gamma_i(\eta) + O(1/\ln \varepsilon_0)$, $T/T_\infty = T_i(\eta) + O(1/\ln \varepsilon_0)$ и в главном приближении удовлетворяют уравнениям

$$\Gamma_i'' - \frac{\Gamma_i'}{\eta} = -\frac{T_i'}{T_i} \left(\Gamma_i' - \frac{2\Gamma_i}{\eta} \right), \quad T_i'' + \frac{T_i'}{\eta} + \frac{(T_i')^2}{T_i} = -\frac{(\gamma-1)M_*^2}{\eta^2} \left(\Gamma_i' - \frac{2\Gamma_i}{\eta} \right)^2, \quad (14)$$

условиям $\Gamma_i = 1$, $T_i = T_*/T_\infty$ при $\eta = 1$ и сращивания с решением во внешней области. Решение для циркуляции представляется в виде

$$\Gamma_i = 2A\eta^2 \int_\eta^\infty \frac{d\eta}{\eta^3 T_i}, \quad A = \frac{1}{2} \left(\int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta^3 T_i} \right)^{-1}. \quad (15)$$

Доказана **теорема**: в случае $T_* \geq T_\infty$ и возрастающей зависимости динамической вязкости от температуры $d\mu/dT > 0$ циркуляция в сжимаемом газе в области $r/\sqrt{\nu_\infty t} = O(1)$ будет превышать циркуляцию в несжимаемой жидкости при тех же r и t (рис. 7), т.е. $A > 1$.

В разделе 2.4 с помощью мультипликативного составления внешнего и внутреннего решений в областях строится равномерно пригодное решение с точностью до $O(1/\ln^2 \varepsilon_0)$ для температуры (рис. 6а) и циркуляции (рис. 6б). В отличие от случая несжимаемой жидкости или сжимаемого газа с постоянной вязкостью, имеется участок с $\Gamma > \Gamma_*$ (рис. 7).

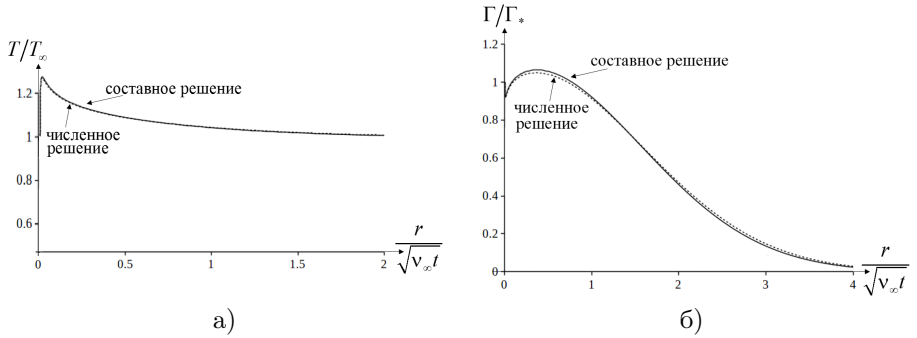


Рис. 6 — Решение при $M_* = \text{Pr} = T_*/T_\infty = 1$, $1/\ln \varepsilon_0 = -0.189$: составное решение и численное решение уравнений Навье–Стокса: а – температура $T/T_\infty(\tau)$, б – циркуляция $\Gamma/\Gamma_*(\tau)$

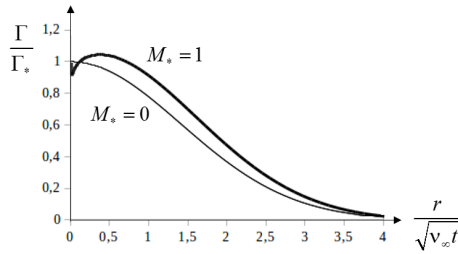


Рис. 7 — Решение для циркуляции $\Gamma/\Gamma_*(\tau)$ в случае сжимаемого газа при $M_* = \text{Pr} = T_*/T_\infty = 1$, $1/\ln \varepsilon_0 = -0.189$ (сплошная кривая) и несжимаемой жидкости (пунктир)

В **разделе 2.5** приведено асимптотическое представление решения при малых числах Маха $M_* \ll 1$.

В **разделе 2.6** описывается схема решения задачи при больших числах Маха $M_* \gg 1$, когда $M_*^4/\ln \varepsilon_0 \geq O(1)$ и уравнения во внешней области нелинейны. Максимум температуры имеет порядок $O(M_*^2)$. Максимум циркуляции достигает порядка $O(M_*^2)$ только на экспоненциально больших временах $M_*^2/\ln \varepsilon_0 \ll 1$, а при $M_*^2/\ln \varepsilon_0 \geq O(1)$ остаётся порядка $O(1)$.

В **разделе 2.7** описана постановка и набор параметров, для которых получено численное решение задачи в рамках уравнений Навье–Стокса.

Третья глава посвящена двум задачам взаимодействия плоской акустической волны со стационарным течением [6]: с осесимметричным вихрем с экспоненциально убывающим полем скорости и с парой вихрей с противоположными циркуляциями вблизи твёрдой поверхности.

В **разделе 3.1** рассматривается общая задача (рис. 8) в рамках уравнений Эйлера сжимаемого газа

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (16)$$

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \rho^{-1} \nabla p = 0, \quad (17)$$

$$(p\rho^{-\gamma})_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) (p\rho^{-\gamma}) = 0. \quad (18)$$

В случае плоской монохроматической падающей волны с безразмерной амплитудой $a \ll 1$ и малого характерного числа Маха течения $M \ll 1$ периодическое по времени решение представимо в виде

$$\rho/\rho_\infty = 1 + ae^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + Ma e^{-i\omega t} \rho_{11}(\mathbf{r}) + O(M^2, a^2), \quad (19)$$

$$\mathbf{v}/c_\infty = M \mathbf{v}_{10}(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{k}} a e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + Ma e^{-i\omega t} \mathbf{v}_{11}(\mathbf{r}) + O(M^2, a^2), \quad (20)$$

$$p/p_\infty = 1 + \gamma a e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + Ma e^{-i\omega t} p_{11}(\mathbf{r}) + O(M^2, a^2). \quad (21)$$

Нулевые члены в (19)–(21) соответствуют невозмущённому газу, сумма степеней M – стационарному течению, $O(a)$ – падающей волне; эти слагаемые задаются по условию. Искомое поле рассеянной волны имеет порядок $O(Ma)$.

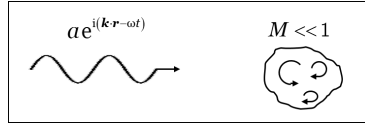


Рис. 8 — Взаимодействие течения со звуковой волной

Поле рассеянной волны в главном приближении описывается уравнением

$$\nabla^2 \rho_{11} + k^2 \rho_{11} = q, \quad q = -2i(\mathbf{k} \cdot \nabla)(\hat{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_{10}), \quad (22)$$

следующим из подстановки (19)–(21) в (16)–(18), с граничным условием излучения Зоммерфельда

$$r^{1/2} [(\rho_{11})_r - ik\rho_{11}] \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Условия существования и единственности решения задачи (22)–(23) рассмотрены в **разделе 3.2**. Решение представляется в виде свёртки правой части уравнения с функцией Грина

$$\rho_{11} = -\frac{i}{4} \int_{\mathbb{R}^2} q(\mathbf{r}') H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d^2 \mathbf{r}', \quad (24)$$

где $H_0^{(1)}(r)$ – функция Ганкеля 1-го рода. Решение существует и единственно тогда и только тогда, когда интеграл (24) сходится:

$$r^{3/2} q \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad (25)$$

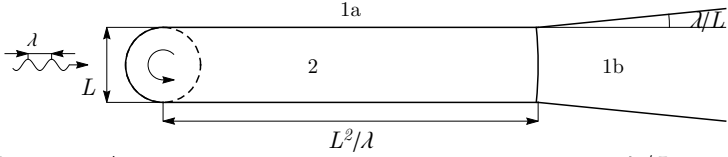


Рис. 9 — Асимптотическая структура решения при $\lambda/L \ll 1$

В частности, задача рассеяния плоской волны вихрем с ненулевой циркуляцией $|\mathbf{v}_{10}| \propto r^{-1}$ некорректна.

В **разделе 3.3** рассмотрен случай цилиндрического вихря, порождённого равномерным вращением кругового цилиндра.

В **разделе 3.3.1** описаны физическая реализация и математическая постановка задачи. Рассматривается вихрь с

$$\mathbf{v}_{10} = \frac{\Gamma}{2\pi kr} \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad \Gamma = e^{-r^2/L^2}. \quad (26)$$

Поле скоростей (26) возникает при равномерном вращении бесконечно протяжённого кругового цилиндра нулевого радиуса в вязкой несжимаемой жидкости и соответствует решению задачи из **главы 2** при $M_* = 0$ (рис. 7) и $L = 2\sqrt{\nu_\infty t_0}$, где t_0 — время вращения. Рассматривается случай $\lambda/L \ll 1$, где $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны.

В **разделе 3.3.2** получены точное представление решения задачи, эквивалентное (24), и асимптотическое представление в дальнем поле

$$\rho_{11} \sim \frac{e^{ikr - i\pi/4}}{\sqrt{kr}} f(\theta) \quad \text{при} \quad \frac{r}{L^2/\lambda} \rightarrow \infty. \quad (27)$$

В **разделе 3.3.3** проанализирована асимптотическая структура рассеянной волны (рис. 9). В асимптотических областях 1a, 1b, 2 величина $|\rho_{11}|$ имеет разный порядок. Характерный линейный масштаб $r = O(L^2/\lambda)$ намного превосходит эффективный радиус вихря L и длину акустической волны λ .

В **разделе 3.3.4** с помощью интегрирования (24) с (22), (26) получено асимптотическое решение в дальнем поле $r \gg L^2/\lambda$ вида (27) с амплитудой рассеяния (рис. 11)

$$f \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \left(1 - e^{-k^2 L^2 \theta^2 / 4} \right). \quad (28)$$

Решение (28) достигает максимума на малых углах $\theta = O(\lambda/L)$ и переходит в решение Питаевского для случая вихря с ненулевой циркуляцией при $\theta \gg \lambda/L$ (рис. 10). Аналогичное решение для случая $\Gamma = \exp(-r/L)$ получили R. Berthet, F. Lund.

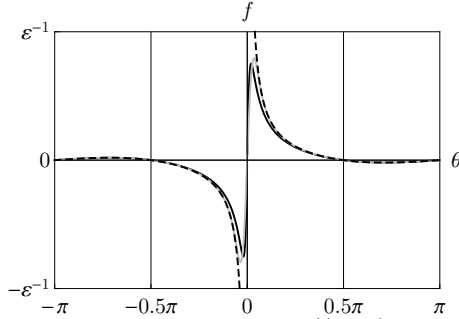


Рис. 10 — Решение в дальнем поле при $\lambda/(2\pi L) = 0.05$: $\Gamma = 1$ (чёрный пунктир), $\Gamma = e^{-r^2/L^2}$ (серая сплошная) (28), $\Gamma = e^{-r/L}$ (чёрная сплошная)

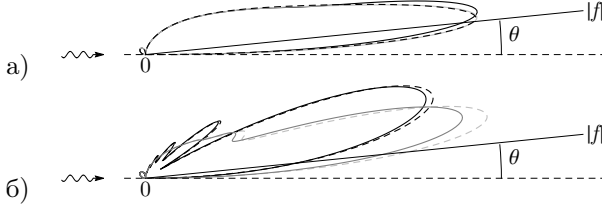


Рис. 11 — Диаграммы рассеяния при $\lambda/(2\pi L) = \varepsilon = 0.05$: а — в дальнем поле (решение (28) (чёрный пунктир) и численное решение при $\varepsilon^2 r = 0.5$ (чёрная сплошная), $\varepsilon^2 r = 1$ (серая сплошная)); б — в ближнем поле (решение, соответствующее (29), (пунктиры) и численное решение при $\varepsilon^2 r = 0.1$ (чёрные), $\varepsilon^2 r = 0.2$ (серые))

В **разделе 3.3.5** получено асимптотическое решение в области $r \ll L^2/\lambda$ (рис. 11)

$$\rho_{11} \sim \pi i \left\{ e^{ikr \cos \theta} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\text{ctg } \theta} \frac{e^{-r^2 L^{-2} \sin^2 \theta (1+\xi^2)}}{1+\xi^2} d\xi + \frac{1}{2} \left(\text{sgn}(\theta) - \text{erf} \left(\frac{r \sin \theta}{L} \right) \right) \right] - \right. \\ \left. - e^{ikr(1-\theta^2/2)} \frac{\theta}{2} \cos \theta \text{ctg } \frac{\theta}{2} \left[\text{sgn}(\theta) - \text{erf} \left(\frac{e^{-i\pi/4} \sqrt{kr} \theta}{\sqrt{2}} \right) \right] \right\}. \quad (29)$$

Амплитуда решения (29) всюду сохраняет порядок $|\rho_{11}| = O(1)$. В полосе $r \ll L^2/\lambda$, $r \sin \theta \ll L$ решение (29) переходит в решение Сакова для случая вихря с ненулевой циркуляцией.

В **разделе 3.3.6** приведено асимптотическое решение в области $r = O(L^2/\lambda)$ на больших углах $\theta \gg \lambda/L$, имеющее вид (27).

В **разделе 3.3.7** приведено сравнение с результатами численного интегрирования (24) (рис. 11).

В разделе 3.3.8 вычисляется полное сечение рассеяния и сечение переноса импульса. Сечение рассеяния в области $L \ll r \ll L^2/\lambda$ совпадает с сечением рассеяния в дальнем поле $r \gg L^2/\lambda$, что согласуется с условием сохранения потока энергии в области невозмущённого газа $r \gg L$.

В разделе 3.4 обсуждается применение представлений из раздела 3.3 к случаю вихря с ненулевой циркуляцией. Показано, что различные методы интегрирования приводят либо к незатухающему решению Сакова, либо к решению Питаевского с особенностью.

В разделе 3.5 рассмотрена задача взаимодействия пары вихрей с противоположными циркуляциями, расположенными на равной высоте над бесконечной прямолинейной твёрдой поверхностью, с плоской акустической волной от источников, расположенных на поверхности.

В разделе 3.5.1 изложена постановка задачи. Поле скорости соответствует начальному условию задачи из главы 1. Вихри считаются неподвижными и расположенными в точках $x = \pm l$, $y = h$. Решение уравнения (22) должно удовлетворять условию на бесконечности и условию непротекания на твёрдой поверхности $\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \rho_{11} = 0$ при $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} = 0$.

В разделе 3.5.2 получено представление решения задачи рассеяния в полуплоскости в виде свёртки правой части с функцией Грина

$$-i/4 \left[H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) + H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - (\mathbf{r}' - 2(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}')\hat{\mathbf{k}})|) \right].$$

В разделе 3.5.3 получено асимптотическое решение для случая $l/h = O(1)$ в дальнем поле $r \gg l^2/\lambda$. Решение имеет вид (27) с комплекснозначной амплитудой рассеяния $f = A_f e^{i\varphi_f}$, где

$$A_f = \sqrt{2\pi} \frac{\cos \theta \sin(kl \sin \theta)}{\sin(\theta/2)} \sqrt{\cos^2 \theta \cos^2(kh \cos \theta) + \sin^2(kh \cos \theta)}, \quad (30)$$

$$\varphi_f = \frac{\pi}{2} + kh - \arctan \frac{\operatorname{tg}(kh \cos \theta)}{\cos \theta}. \quad (31)$$

Амплитуда (30) достигает максимума порядка $O(l/\lambda)$ в направлении распространения падающей волны $\theta = 0$ и имеет число нулей порядка $O(l/\lambda)$. Зависимость фазы от угла означает, что рассеянная волна отлична от цилиндрической. Это качественно отличает решение данной задачи от решений задач рассеяния в пространстве без твёрдых границ (К. Tanaka, S. Ishii; К. Naugolnykh; Т. Kambe, У. М. Оо; В. В. Климов, В. Л. Прозоровский; решение из раздела 3.3).

В заключении приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Получено численное решение двумерной задачи об эволюции в вязкой несжимаемой жидкости двух вихрей с противоположными циркуляциями вблизи бесконечной прямолинейной твёрдой

поверхности. Описан механизм глобального нестационарного отрыва пограничного слоя. Рассчитаны модификация траекторий движения вихрей и уменьшение со временем их циркуляции под влиянием отрыва.

2. Впервые на основе асимптотического анализа уравнений Навье–Стокса определены характеристики цилиндрического вихря, возникающего при вращении кругового цилиндра в вязкой среде, для случая сжимаемого газа с линейной зависимостью коэффициентов диффузии от температуры. Найдены условия, при которых циркуляция скорости будет на больших расстояниях от цилиндра выше, чем в случае несжимаемой жидкости, и в некоторой промежуточной области — выше, чем на поверхности цилиндра.
3. Впервые рассмотрена задача взаимодействия цилиндрического вихря, возникающего при вращении кругового цилиндра в вязкой среде, с плоской акустической волной. Построено асимптотическое решение для случая, когда характерный масштаб области течения велик по сравнению с длиной волны. Два известных решения для случая вихревой нити, решение Л. П. Питаевского и решение П. В. Сакова, содержатся в качестве предельных случаев в двух различных асимптотических областях. Получено решение в дальнем поле задачи взаимодействия плоской акустической волны и двух вихрей с противоположными циркуляциями вблизи бесконечной прямолинейной твёрдой поверхности. Рассеянная волна имеет вид уходящей на бесконечность волны, отличной от цилиндрической.

Публикации автора по теме диссертации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Гаджиев Д. А., Гайфуллин А. М. Эволюция двух вихрей вблизи твердой поверхности // Прикладная механика и техническая физика. — 2018. — Т. 59, № 2. — С. 31–38.
2. Gadzhiev D. A., Gaifullin A. M. Structure of laminar unsteady boundary layer separation under an airplane wake vortex interaction with a ground surface // AIP Conference Proceedings. — 2018. — Vol. 2027. — P. 030125.
3. Gaifullin A. M., Gadzhiev D. A., Zubtsov A. V. Vortices appearance and diffusion // Journal of Physics: Conference Series. — 2017. — Vol. 894. — P. 012017.
4. Gadzhiev D. A., Gaifullin A. M., Zubtsov A. V. An axisymmetric vortex around a rotating infinitely elongated circular cylinder in a viscous heat-conducting gas // AIP Conference Proceedings. — 2020. — Vol. 2211. — P. 030009.

5. *Гаджиев Д. А., Гайфуллин А. М., Зубцов А. В.* О порождении вихря вращающимся цилиндром // Прикладная математика и механика. — 2020. — Т. 84, № 5. — С. 570–589.
6. *Gadzhiev D. A., Gaifullin A. M.* Sound scattering by a vortex: case of exponentially decaying velocity // Journal of Fluid Mechanics. — 2021. — Vol. 918. — A46.
7. *Gaifullin A. M., Gadzhiev D. A.* Evolution of vortex wake near the Earth's surface // AIP Conference Proceedings. — 2016. — Vol. 1170. — P. 020019.
8. Vortical structures interaction / A. M. Gaifullin [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. — 2019. — Vol. 1268. — P. 012016.
9. *Gadzhiev D. A., Gaifullin A. M.* Waves propagation through a localized axisymmetric vortical flow // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — Vol. 1959. — P. 012020.

Гаджиев Дмитрий Александрович

Взаимодействие вихревых течений с твёрдыми поверхностями и акустическими
возмущениями

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать 05.10.2021. Заказ № _05/10-1_
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ЗАО НПКФ «МаВР» г. Жуковский,
Ул. Гагарина, д. 2, офис 208
Тел. 8-495-723-71-74