

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»



На правах рукописи

Гаджиев Дмитрий Александрович

**Взаимодействие вихревых течений с твёрдыми
поверхностями и акустическими возмущениями**

Специальность 01.02.05 —
«Механика жидкости, газа и плазмы»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, член-корреспондент РАН
Гайфуллин Александр Маркович

Жуковский — 2021

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Эволюция вихревой пары вблизи твёрдой поверхности	26
1.1 Постановка задачи	26
1.2 Решение на малых временах	27
1.3 Решение на больших временах	29
1.4 Нестационарный отрыв пограничного слоя	31
1.5 Диссипация завихренности	36
1.6 Траектории движения вихрей	36
1.7 Выводы по главе 1	37
Глава 2. Порождение вихря вращением кругового цилиндра в вязком сжимаемом газе	40
2.1 Постановка задачи	40
2.2 Асимптотическое решение во внешней области	43
2.3 Асимптотическое решение во внутренней области	48
2.4 Составное решение	54
2.5 Асимптотическое решение при малых числах Маха	56
2.6 Асимптотическое решение при больших числах Маха	57
2.7 Численное решение	60
2.8 Выводы по главе 2	61
Глава 3. Взаимодействие локализованных вихрей с акустическими возмущениями	63
3.1 Постановка и представление решения задачи	63
3.2 Корректность постановки	68
3.3 Взаимодействие акустических возмущений с экспоненциально затухающим цилиндрическим вихрем	71
3.3.1 Постановка задачи	71
3.3.2 Представление решения	76
3.3.3 Качественный анализ	78
3.3.4 Асимптотическое решение в дальнем поле	81

3.3.5	Асимптотическое решение в области геометрической акустики	82
3.3.6	Асимптотическое решение в ближнем поле	85
3.3.7	Численное решение	86
3.3.8	Сечение рассеяния	91
3.4	Взаимодействие акустических возмущений с вихревой нитью . . .	92
3.5	Взаимодействие акустических возмущений с вихревой парой вблизи твёрдой поверхности	94
3.5.1	Постановка задачи	94
3.5.2	Представление решения	95
3.5.3	Асимптотическое решение в дальнем поле	96
3.6	Выводы по главе 3	99
Заключение		101
Приложение А. Вывод решения из § 3.3		114

Введение

Работа посвящена исследованию эволюции вихревых течений вблизи твёрдых тел и взаимодействию вихрей с акустическими возмущениями.

Актуальность темы исследования определяется распространённостью вихревых течений в природе и технике. Вихри являются структурными единицами турбулентного течения жидкости или газа, участвуют в формировании подъёмной силы крыла самолёта, возникают в океанах и атмосфере Земли.

Ряд практически важных задач связан с эволюцией вихревых течений жидкости или газа вблизи твёрдых поверхностей. Существенно вихревым является течение в вязком пограничном слое вблизи твёрдой поверхности. Отрыв пограничного слоя, возможный при условии неблагоприятного градиента давления, может приводить к появлению вихрей вдали от твёрдых границ в изначально потенциальном потоке. Аналогично ряд вихревых течений можно создать движением твёрдых тел в вязкой среде.

Другие актуальные задачи возникают при распространении через область вихревого течения сжимаемого газа акустических волн. Среди них проблемы рассеяния, излучения и поглощения звука вихревыми и турбулентными течениями, акустической диагностики вихревых течений (определения расположения вихрей на основе картины рассеяния звука), потери устойчивости ламинарных вихревых течений под воздействием звука.

Известно, что за самолётом с крылом большого удлинения возникает вихревой след в виде двух вихревых трубок с циркуляциями, равными по величине и противоположными по знаку, опускающихся вниз за счёт взаимоиндукции. По порядку величины циркуляции вихрей равны циркуляции присоединённого вихря на крыле, обеспечивающего подъёмную силу. Интенсивный след за большим самолётом живёт порядка одной — двух минут и тянется на расстояние порядка 10 километров [10]. Попадание одного самолёта в след за другим может привести к потере устойчивости первого. Нахождение характеристик вихревого следа за самолётом на режиме посадки важно с точки зрения определения безопасного предпосадочного расстояния между самолётами. На режиме посадки механизация крыла отклонена, и за самолётом образуется многовихревая структура. На расстоянии за самолётом порядка 5 — 10 размахов крыла она превращается в пару концентрированных вихрей с циркуляциями равной величины

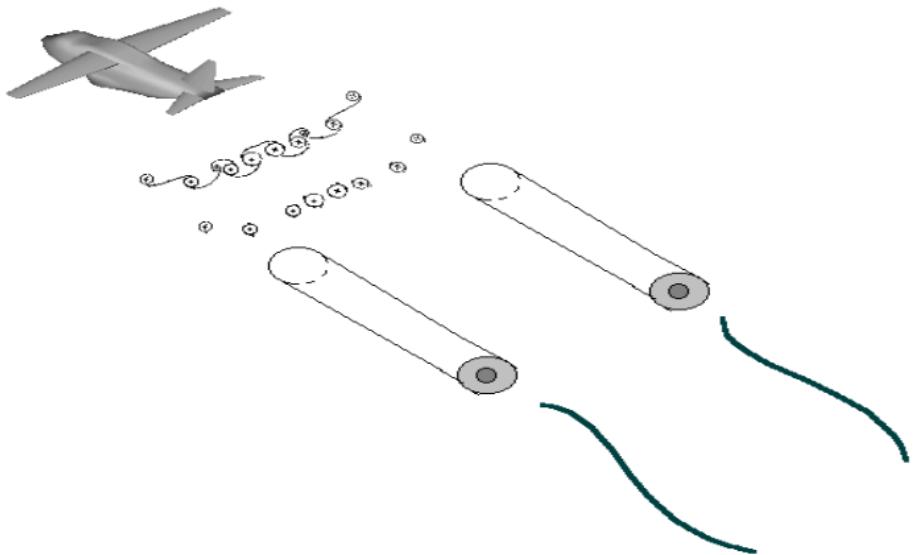


Рисунок 1 — Эволюция вихревого следа за самолётом с крылом большого удлинения [10]

и противоположного знака [10] (см. рисунок 1). При больших числах Рейнольдса характерный размер вихрей будет малым. Кроме того, на таких расстояниях в системе координат, движущейся вместе с самолётом, будет справедлива нестационарная аналогия: трёхмерное стационарное течение в дальнем следе будет эквивалентно двумерному нестационарному течению в плоскости, движущейся со скоростью набегающего потока. Поэтому в случае пролёта на малой высоте над поверхностью Земли развитие течения в фиксированном сечении, перпендикулярном вектору скорости самолёта, можно моделировать с помощью задачи о двух точечных вихрях вблизи бесконечно протяжённой твёрдой поверхности.

Задачи взаимодействия течений жидкости или газа с акустическими возмущениями часто встречаются в практике, например, при исследовании распространения звука от источников, расположенных на поверхности Земли в вихревом следе за самолётом. Одной из классических проблем является задача рассеяния плоской акустической волны цилиндрическим вихрем — двумерным осесимметричным течением с полем окружной скорости $w(r)$, величина которой зависит от расстояния до оси r (см. рисунок 2). В наиболее распространённой постановке рассматривается вихревая нить, или потенциальный вихрь, с завихренностью сосредоточенной на оси и окружной скоростью затухающей обратно пропорционально расстоянию r до неё:

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad (1)$$

где циркуляция скорости Γ постоянна. Эквивалентной является постановка с завихренностью, локализованной в ограниченной области — например, с вихрем Ранкина или вихрем Лэмба–Оззена — если масштаб данной области мал по сравнению с длиной акустической волны. Попытки решения задачи рассеяния в такой постановке многочисленны [11—22] и ведут счёт начиная с 1950-х гг. Имеющиеся решения проанализированы в разделе «**Степень разработанности темы**». Вопросы, послужившие предпосылкой, включают излучение и рассеяние звука турбулентным течением [23], теорию генерации аэродинамического шума струи и теорию флейты [24], акустическую неустойчивость вихря Ранкина [25] и вихревого кольца [17], поглощение звука тонкими вихревыми нитями [26; 27], влияние океанических течений на поверхностные волны [28]. Данная задача имеет аналоги в различных разделах механики и физики за пределами аэроакустики и классической гидродинамики, например, в динамике сверхтекучей жидкости и в квантовой механике. В первом случае плоская волна моделирует фононы, которые наряду с ротонами составляют нормальную компоненту сверхтекучего гелия; вихревая нить — сверхтекущую компоненту; учёт их взаимодействия необходим для вычисления фононной части силы взаимного трения, что было проделано Л. П. Питаевским [11]. Во втором случае задача связана с эффектом Ааронова–Бома (и была рассмотрена его первооткрывателями [29]): пучок электронов, взаимодействуя с локализованным внутри кругового цилиндра вихревым магнитным полем, «чувствует» его влияние вне цилиндра, где величина магнитного поля равна нулю, но не равен нулю электромагнитный потенциал; роль падающей плоской волны здесь играет волновая функция свободной частицы. В борновском приближении линеаризованные уравнения Эйлера и уравнение Шрёдингера сводятся к одному и тому же двумерному волновому уравнению с правой частью. То же получается из линеаризованных уравнений мелкой воды [30], линеаризованных уравнений Гросса–Питаевского [31] и уравнений Максвелла [32]. Аналогии продемонстрированы в работах [30; 33; 34]. Необходимым условием применимости борновского приближения в задаче рассеяния звука вихрем является малость чисел Маха.

Принципиальное значение имеет поле окружной скорости, определяющее описанную выше задачу рассеяния: для корректности постановки задачи в борновском приближении $w(r)$ должно достаточно быстро затухать на бесконечности. В случае вихревой нити (1) (как и в случае вихря Ранкина или Лэмба–Оззена) с $w \propto r^{-1}$ задача оказывается некорректной [18; 34; 36; 37].

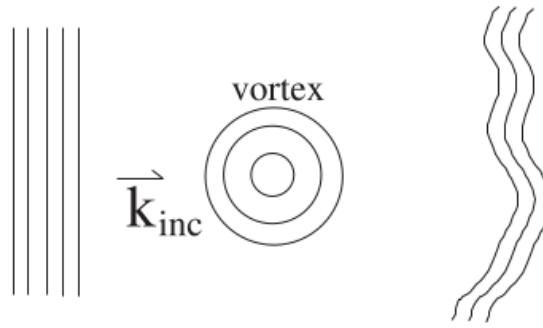


Рисунок 2 — Рассеяние плоской акустической волны цилиндрическим вихрем (схема) [35]

В этом нет парадокса, поскольку течение с $w \propto r^{-1}$ в неограниченном пространстве обладает бесконечной кинетической энергией на единицу длины $E \propto \int w^2 r dr \propto \int dr/r$ и, следовательно, не может быть создано физически. В реальности возникают либо замкнутые, либо уходящие в бесконечность вихревые структуры с нулевой суммарной циркуляцией скорости по любому поперечному сечению. Таким образом, устраняется особенность при $r \rightarrow \infty$. В качестве примеров можно привести вихревой след за самолётом с крылом большого удлинения, состоящий из двух вихревых трубок с противоположными циркуляциями, и вихревое кольцо вертолёта. Особенность при $r \rightarrow 0$ устраняется за счет того, что образующийся вихрь не является бесконечно тонким, а имеет структуру. В случае, когда борновское приближение не предполагается, задача для вихревой нити может быть поставлена корректно [29; 30; 33; 37].

Для корректной постановки в рамках борновского приближения задачи, близкой к предыдущей, естественным вариантом видится выбор цилиндрического вихря, близкого к вихревой нити в ограниченной части пространства, но с более быстрым затуханием окружной скорости. Отсюда встаёт вопрос о физических способах генерации таких вихрей. Данная проблема интересна и без отсылки к задаче рассеяния, поскольку вихревая нить (1) в пространстве, или точечный вихрь на плоскости, является одним из распространённых модельных объектов в механике несжимаемой жидкости. Это объясняется высокой степенью симметрии поля окружных скоростей (1) и тем, что оно является точным решением как уравнений Эйлера, так и уравнений Навье–Стокса; в вязком случае для его поддержания необходим постоянный подвод энергии [10; 38]. При этом, с точки зрения применения в постановке задачи рассеяния и её решения с

высокой точностью по числам Маха, решение задачи о порождении вихря необходимо иметь для случая сжимаемого газа. Чтобы не иметь дело с особенностью на оси, следует рассматривать вихрь с распределённой завихренностью.

Степень разработанности темы. Хорошо известны задача о диффузии бесконечно протяжённой одиночной прямолинейной вихревой нити в безграничной несжимаемой жидкости с полем окружной скорости (1) [39] и обратная задача создания поля скоростей (1) в ограниченной области пространства с помощью вращения цилиндра нулевого радиуса [10]. Под действием сил вязкости жидкость около цилиндра в первом случае будет тормозиться, а во втором разгоняться. Характерная вязкая область будет расширяться со временем пропорционально \sqrt{t} .

Поскольку эволюция вихревых структур часто происходит в присутствии твердых поверхностей, ряд работ посвящён исследованию диффузии для модельного случая — над прямолинейной подстилающей поверхностью в вязкой ламинарной жидкости. Известны исследования эволюции одиночной вихревой нити бесконечной протяженности над прямолинейной твёрдой поверхностью в вязкой жидкости [40]; при этом неясно, возможно ли физически создать такое начальное поле скоростей даже в ограниченной области: при вращении цилиндра начнётся вязкое взаимодействие приведённой в движение жидкости с поверхностью. Близкой конфигурацией, реализуемой на практике при пролёте самолета с прямоугольным крылом большого удлинения вблизи поверхности Земли, является пара вихревых нитей противоположной интенсивности над твёрдой поверхностью. В этом случае вихри расположены на равной высоте над поверхностью, которая за счёт взаимоиндукции со временем уменьшается. В пределе, когда высота вихрей намного меньше расстояния между ними, такая задача близка к задаче о диффузии одиночного вихря над плоскостью. В противоположном случае — к задаче о диффузии двух вихрей в неограниченном пространстве, для которой существует асимптотическое решение при больших числах Рейнольдса $Re \rightarrow \infty$ [41]. Согласно [41], со временем циркуляция вихрей уменьшается за счёт двух механизмов: аннигиляции завихренности при переходе через линию симметрии в результате диффузии и «выброса» завихренности за пределы замкнутой области, движущейся вместе с вихрями.

В случае идеальной жидкости задача о двух точечных вихрях вблизи бесконечной плоскости решается применением теории потенциальных течений, откуда получаются выражения для траекторий перемещения вихрей [42] (1.3).

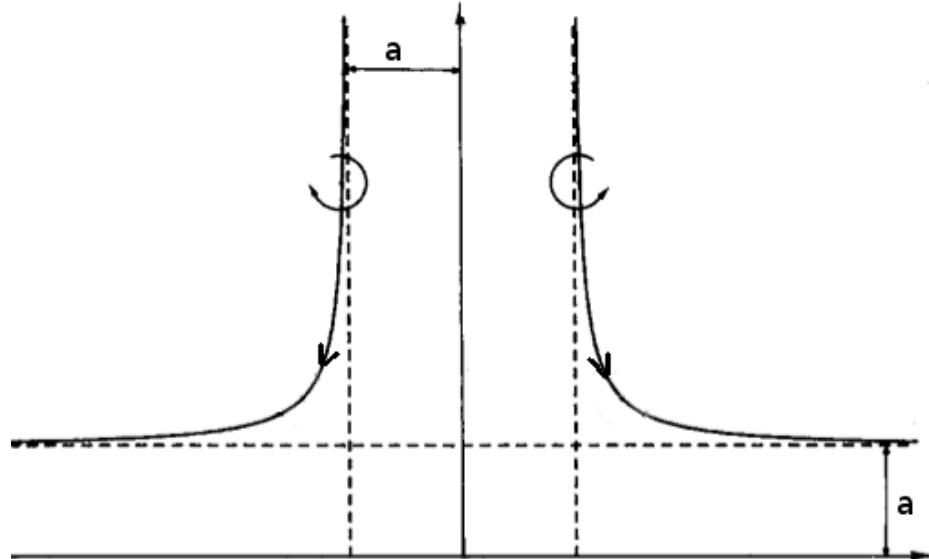


Рисунок 3 — Траектории движения двух точечных вихрей над бесконечной плоскостью [43]

На больших временах вихри будут двигаться с постоянными скоростями в разные стороны параллельно плоскости (см. рисунок 3).

В лётных испытаниях [42], экспериментах в аэродинамической трубе [44] и расчётных исследованиях для случая ламинарного течения вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса [45; 46] показано, что вихри, опустившись до некоторого уровня, вместо движения параллельно поверхности начинают подниматься вверх, отклоняясь от траектории в случае идеальной жидкости (см. рисунок 3) существенно сильнее, чем предсказывает оценка вытесняющего действия пограничного слоя. В [44] при числах Рейнольдса $Re \sim 10^5$ обнаружено торможение и, в некоторых случаях, разворот вихрей в горизонтальном направлении. Причиной является отрыв пограничного слоя от твёрдой поверхности вследствие сильного неблагоприятного градиента давления на определённом участке (см. рисунок 7). В результате отрыва у поверхности образуются области рециркуляционного течения («бабблы»), завихренность внутри которых по знаку противоположна завихренности ближайшего вихря; в некоторый момент они отдаляются от поверхности, что приводит к качественной перестройке картины течения. В [43] обнаружена особенность в решении уравнений Прандтля, проявляющаяся в резком увеличении размеров рециркуляционной зоны и предвещающая появление глобального отрыва. При численном решении задачи в рамках уравнений Навье — Стокса отрыв пограничного слоя наблюдался в диапазоне $Re \sim 10^3 \div 10^5$ [46] и не наблюдался при $Re \sim 10^2$ [45], при этом

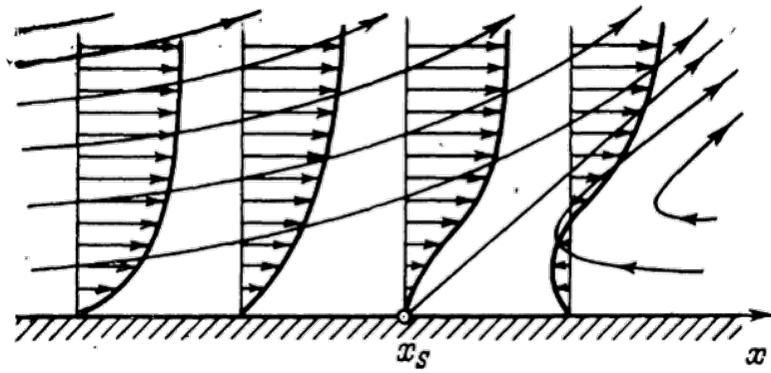


Рисунок 4 — Профили продольной компоненты скорости в стационарном пограничном слое близи точки отрыва x_s [54]

«отскок» вихрей от поверхности имел место во всех случаях. При увеличении числа Рейнольдса характеристики течения приобретают более сложный, немонотонный характер [46]. Качественно похожая картина наблюдалась при других начальных конфигурациях вихрей: одиночной вихревой нити [40], вихревого диполя с линейной связью между завихренностью и функцией тока [47], вихревого кольца [48].

Явление стационарного отрыва пограничного слоя было описано Л. Прандтлем [49]. Согласно критерию Прандтля, отрыв пограничного слоя происходит в точке на твёрдой поверхности, в которой трение обращается в нуль (рисунок 4). Позже Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем [50] и С. Гольдштейном [51] была обнаружена особенность в решении уравнений пограничного слоя при приближении к точке отрыва, свидетельствующая о невозможности дальнейшего решения в рамках концепции слабого взаимодействия. Теория двумерного стационарного отрыва с учётом сильного взаимодействия для сверхзвуковых течений была построена В. Я. Нейландом [52], а для течений несжимаемой жидкости — В. В. Сычёвым [53]. В несжимаемой жидкости перед точкой отрыва толщина пограничного слоя резко увеличивается, что приводит к появлению добавочного градиента давления, ликвидирующего особенность; такой отрыв называется самоиндукцированным и может быть разрешён только путём совместного решения уравнений Эйлера и уравнений Прандтля в окрестности точки отрыва [53].

Отрыв пограничного слоя от поверхности Земли в области вихревого следа будет существенно нестационарным из-за изменения положения вихрей со временем. Физика нестационарного отрыва пограничного слоя значительно сложнее, и соответствующая теория до сих пор не построена, несмотря на то,

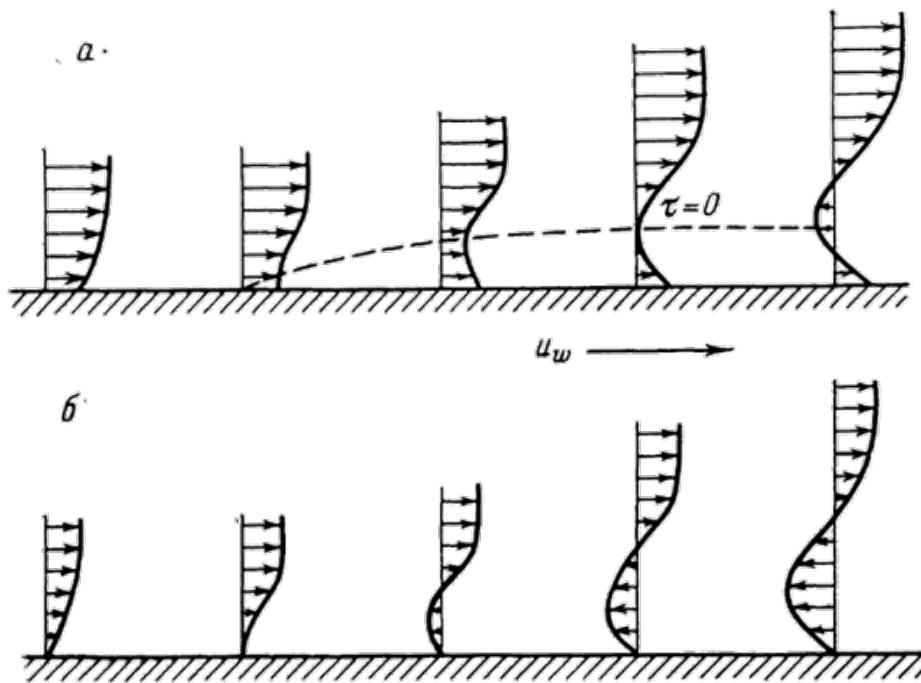


Рисунок 5 — Профили продольной компоненты скорости, соответствующие друг другу: а — в стационарном пограничном слое вблизи точки отрыва на поверхности, движущейся вниз по потоку, б — в нестационарном пограничном слое

[54]

что это явление встречается во многих задачах. Предпринимались попытки свести нестационарный отрыв пограничного слоя от неподвижной поверхности к стационарному отрыву от подвижной поверхности, исследованному для случая несжимаемой жидкости Вик. В. Сычёвым [55] (см. рисунки 5, 6) и С. Н. Тимошиным [56]. Такой отрыв происходит в точке внутри пограничного слоя, в которой продольная компонента скорости u и трение $\partial u / \partial y$ обращаются в нуль. В [54] приведён критерий Мура–Ротта–Сирса [57–59] наступления соответствующего нестационарного отрыва. Заметим, что более сложным является случай, когда точка отрыва движется вниз по потоку (или твёрдая поверхность – вверх) (рисунок 6), поскольку на течение в окрестности точки отрыва будут влиять возмущения, приходящие из зоны возвратных токов [54]. Применение результатов теории отрыва от движущейся поверхности к нестационарному отрыву осложняется тем, что: 1) скорость точки отрыва неизвестна заранее [60]; 2) не всякое течение можно представить как стационарное в некоторой системе координат.

Вышеописанные трудности относятся к получению решения в окрестности точки нестационарного отрыва. Вместе с тем во многих течениях, в частности, при нестационарном обтекании профиля на больших углах атаки [61] и обтека-

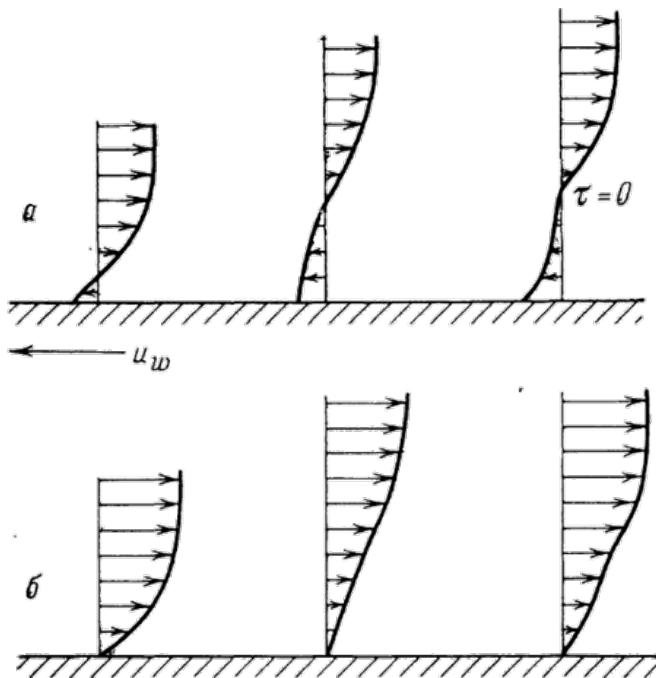


Рисунок 6 — Профили продольной компоненты скорости, соответствующие друг другу: а — в стационарном пограничном слое вблизи точки отрыва на поверхности, движущейся вверх по потоку, б — в нестационарном пограничном слое [54]

нии пластины с подвижной поверхностью [62—65], наблюдается более сложная картина — глобальный нестационарный отрыв. Другим примером является взаимодействие вихревого следа за самолётом с поверхностью Земли в тех случаях, когда полёт происходит на малой высоте. Рассмотрим эволюцию самолётных вихрей в фиксированном сечении за удаляющимся самолётом. Благодаря взаимной индукции вихри сначала уменьшают свою высоту над поверхностью. При этом на самой поверхности образуется нестационарный пограничный слой, скорость на внешней границе которого растёт по мере опускания вихрей. В некоторый момент происходит отрыв пограничного слоя. Завихренная жидкость отходит от твёрдой поверхности, образуя сложную вихревую систему [66], взаимодействующую с самолётными вихрями. Вследствие этого картина внешнего течения непрерывно меняется, и характеристики отрывной зоны будут существенно нестационарными. Отрыв пограничного слоя приводит к тому, что самолётные вихри сперва начинают увеличивать свою высоту, и впоследствии их координаты меняются немонотонно [66] [1].

Для реального турбулентного вихревого следа существуют расчётные исследования с применением различных моделей турбулентности [67] [1]. Из-за пространственной синусоидальной неустойчивости вихревых трубок в турбу-

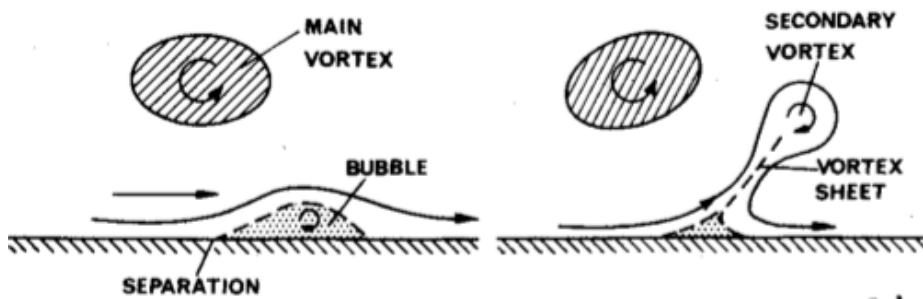


Рисунок 7 — Отрыв пограничного слоя от твёрдой поверхности, индуцированный вихревым течением [44]

лентной атмосфере в определённый момент происходит их перезамыкание в вихревые кольца, после чего след быстро разрушается (см. рисунок 1). Линейная теория устойчивости развита в [68; 69]. Влияние бокового ветра и температурная стратификация учтены в [46]. Турбулентный отрыв двумерного пограничного слоя от шероховатой твёрдой поверхности рассмотрен в [70] для пологого холма и в [71] для поверхности периодической формы. Снижение турбулентного трения в пограничном слое за счёт использования податливых покрытий обсуждается в [72].

Два противоположно закрученных вихря вблизи поверхности возникают, помимо следа за самолётом, в некоторых неустойчивых течениях [43] — в течении Куэтта между двумя врачающимися цилиндрами и в пограничном слое на вогнутой поверхности из-за центробежной неустойчивости (вихри Гётлера) — и в турбулентных пограничных слоях.

Теория рассеяния акустических волн течениями газа развита в 1940-е гг. Д. И. Блохинцевым [73] и в 1950-е гг. М. Дж. Лайтхиллом [23]. Д. И. Блохинцев получил линейное уравнение для распространения малых акустических возмущений в потенциальном потоке и показал предельный переход к геометрической акустике в случае малых длин волн [73; 74]. Позже аналогичный результат был получен М. Хоу [24]. М. Дж. Лайтхилл рассмотрел распространение звука в завихренной среде с малыми числами Маха в борновском приближении и получил ряд общих выражений для интенсивности рассеянной волны [23; 75; 76]. В борновском приближении, когда амплитуда рассеянной волны предполагается намного меньше амплитуды падающей, уравнение Блохинцева–Хоу для суммарного акустического поля (суперпозиции падающего и рассеянного) при заданном падающем поле сводится к неоднородному волновому уравнению для рассеянного поля. В качестве граничного условия для волнового уравнения используется условие излучения Зоммер-

фельда [77], согласно которому на больших расстояниях от вихря существуют только волны, уходящие на бесконечность, и отсутствуют приходящие из бесконечности. Решение неоднородного волнового уравнения, удовлетворяющее граничному условию излучения Зоммерфельда, представляется в виде свёртки правой части уравнения с функцией Грина. Для корректно поставленной задачи интеграл свёртки сходится, решение единствено [78] и в некоторой дальней области («дальнем поле») имеет вид в трёхмерном случае сферической волны:

$$\rho_{scat} \propto p_{scat} \propto \frac{e^{i(kr_3 - \omega t)}}{kr_3} f_3(\theta_3, \varphi_3), \quad \mathbf{v}_{scat} \propto \hat{\mathbf{r}}_3 \rho_{scat}, \quad (2)$$

а в двумерном — цилиндрической:

$$\rho_{scat} \propto p_{scat} \propto \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{\sqrt{kr}} f(\theta), \quad \mathbf{v}_{scat} \propto \hat{\mathbf{r}} \rho_{scat}. \quad (3)$$

Здесь ρ_{scat} , p_{scat} , \mathbf{v}_{scat} — возмущения плотности, давления и скорости в рассеянной волне; t — время, \mathbf{r}_3 — радиус-вектор в трёхмерном пространстве, r_3 , θ_3 , φ_3 — сферические координаты, \mathbf{r} — радиус-вектор в двумерном пространстве, r , θ — полярные координаты; ω — угловая частота и \mathbf{k} — волновой вектор падающей волны; $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$, $\hat{\mathbf{r}}_3 = \mathbf{r}_3/r_3$ и $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ — соответствующие единичные вектора; $f_3(\theta_3, \varphi_3)$ и $f(\theta)$ — амплитуды рассеяния. Степень затухания решений (2) и (3) на бесконечности согласуется с условием сохранения потока энергии [50] в трёхмерном и двумерном пространстве, соответственно.

В 1980-х гг. в рамках борновского приближения были найдены решения в дальнем поле вида (2) или (3) для ряда частных трёхмерных и двумерных задач рассеяния: с однородной плоской волной в качестве падающего акустического поля для случая вихревого кольца [17; 79; 80], вихревой пары [81], дорожки Кармана [82], вихря Хилла [83], вихря Тейлора (численно) [18], диполя Лэмба–Чаплыгина [84].

Двумерная задача рассеяния однородной плоской волны на вихревой нити (1) или на прямолинейном вихре со структурой с

$$\Gamma(r) \rightarrow \text{const} \quad \text{при} \quad r/r_* \rightarrow \infty, \quad \text{где} \quad kr_* \ll 1, \quad (4)$$

k — волновое число падающей волны, r_* — характерный радиус вихря, исследуется с конца 1950-х гг. [11–22]. Для краткости в диссертации этой случай именуется ПВТВ (плоская волна, точечный вихрь). Из литературы [11–22] известны два качественно отличных друг от друга решения, каждое из которых

физически противоречиво. Более раннее, впервые полученное Л.П. Питаевским [1] в 1958 г., в области $kr \rightarrow \infty$ имеет вид цилиндрической волны (3) с амплитудой рассеяния

$$f(\theta) \propto \cos \theta \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \quad (5)$$

с особенностью в направлении падения волны $\theta = 0$, т.е. на линии за вихрем (рисунок 8а). С помощью различных подходов и для разных распределений завихренности, выражение (5) было получено также в [12—18]. Второе решение, в отличие от (5), не имеет особенностей, но и не сводится к виду (3), обладая более сложной структурой; амплитуда рассеянной волны остаётся конечной на сколь угодно больших расстояниях от вихря (рисунок 8б):

$$\max_{\theta} |\rho_{scat}| \rightarrow \text{const} \quad \text{при} \quad kr \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Данное решение было впервые получено П.В. Саковым в 1991 г. [19] и позднее в [20—22]. Для краткости будем называть решение вида (5) выражением (i), а решение со свойством (6) выражением (ii).

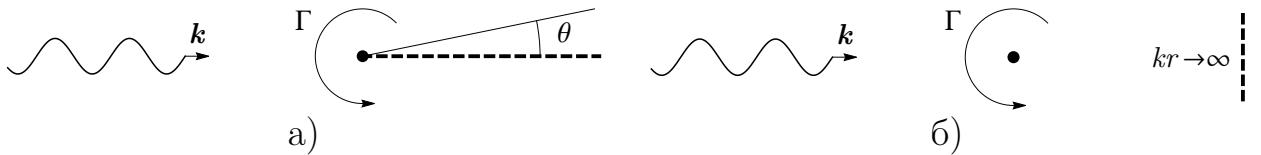


Рисунок 8 — Особые решения задачи рассеяния плоской акустической волны цилиндрическим вихрем (4): а — выражение (i), б — выражение (ii). Пунктирами показаны особые зоны

Прямая подстановка в исходное уравнение показывает, что выражение (ii) является его решением в главном приближении при $kr \rightarrow \infty$, в то время как выражение (i) нет: в главном приближении оно удовлетворяет однородному волновому уравнению и, следовательно, является некорректным. Численные [15; 18; 85—89] и экспериментальные [33; 90—93] результаты для акустических волн и волн на поверхности воды однозначно опровергают выражение (i) и качественно подтверждают выражение (ii) в случаях, соответствующих борновскому приближению (примеры показаны на рисунках 9, 10). При этом выражение (ii) не удовлетворяет граничным условиям излучения. Оба выражения (i) и (ii) обладают бесконечным потоком энергии. Решение вида цилиндрической волны (3) без особенностей до сих пор неизвестно.

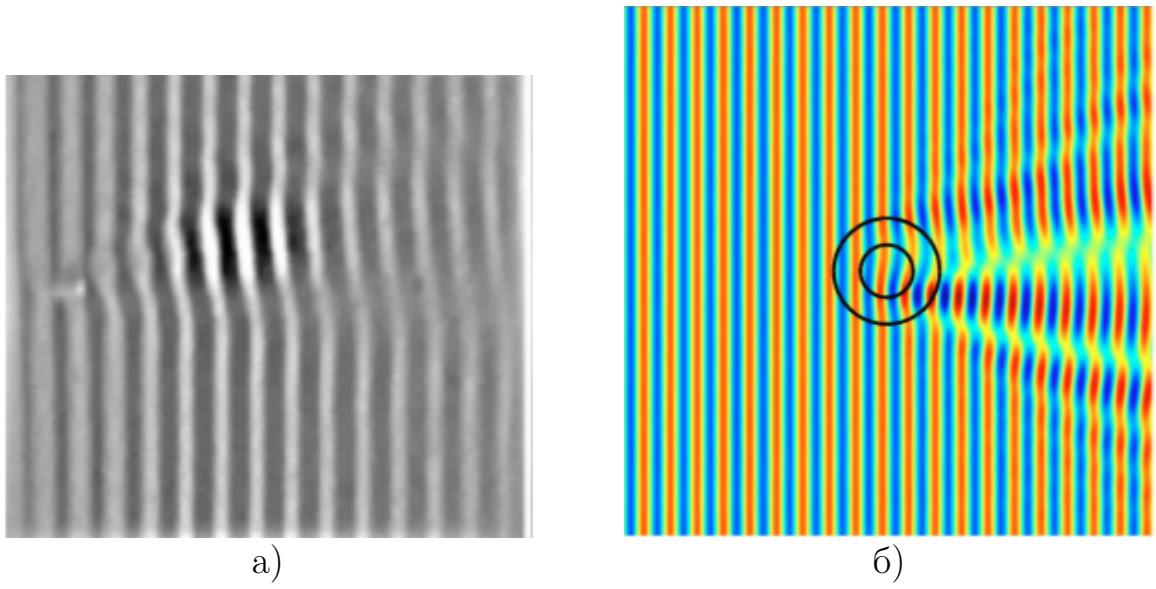


Рисунок 9 — Наблюдаемое акустическое поле $\rho_{inc} + \rho_{scat}$: а — эксперимент [92], б — расчёт [94]

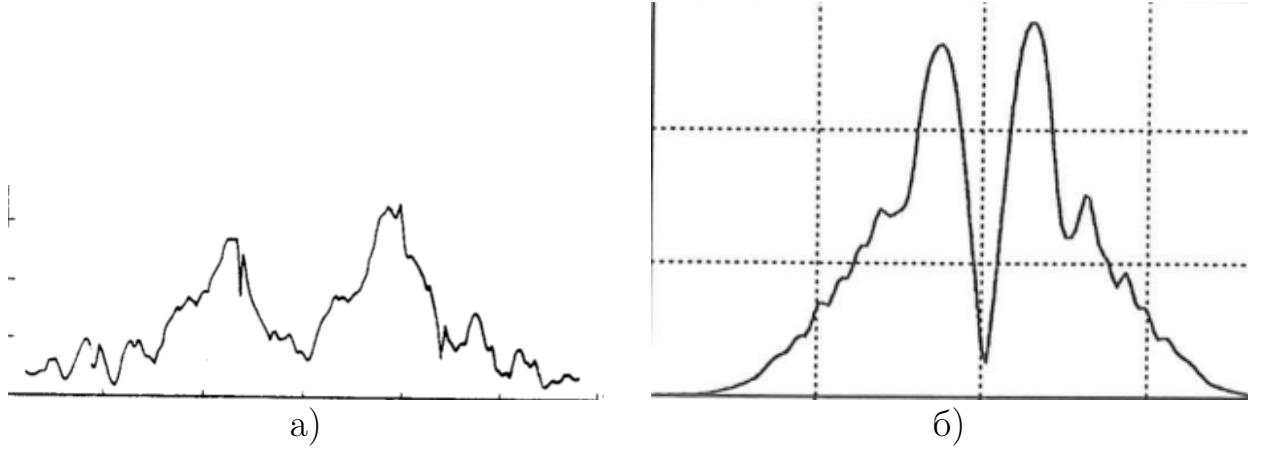


Рисунок 10 — Диаграмма направленности $f(\theta)$: а — эксперимент [90], б — расчёт [18]

Парадоксальные свойства выражений (i) и (ii) обусловлены некорректностью задачи рассеяния плоской волны вихревой нитью [18; 34; 36; 37]. Некорректность связана с медленным затуханием на бесконечности правой части волнового уравнения, пропорциональной r^{-1} при $r/r_* \rightarrow \infty$, вследствие чего взаимодействие волны с вихрем существенно во всём пространстве; дальнее поле, в котором решение имело бы вид (3) и удовлетворяло условию излучения, отсутствует. Постановка условия излучения несмотря на физические противоречия приводит к выражению (i), а постановка других граничных условий — к выражению (ii). Вместе с тем И.В. Беляев и В.Ф. Копьёв отмечают некорректность каждой из постановок, использующей борновское приближение [37]. Действительно, во всех случаях неявно используются дополнительные

предположения, которым само решение (ii) не удовлетворяет. В [19] решение представляется через расходящийся интеграл, значение которого зависит от способа вычисления. В [20; 21] вместо условия уходящих волн выставляется условие причинности: к волновому числу падающей волны прибавляется бесконечно малая положительная мнимая часть. Условие причинности следует из принципа предельного поглощения [78], эквивалентного условию излучения; при этом неявно предполагается затухание рассеянной волны на бесконечности, что противоречит решению (6). Известные решения, полученные без использования борновского приближения, соответствуют выражению (ii). Так, решение [29; 33] воспроизводит выражение (ii) во всём пространстве. Решение [37], полученное при замене плоской волны цилиндрической волной, индуцируемой точечным источником, расположенным на конечном расстоянии R_0 от вихря, воспроизводит выражение (ii) в области $r \ll R_0$.

Некорректность постановки является специфическим свойством именно задачи рассеяния плоской волны вихревой нитью, не имеющим аналогов в трёхмерном случае [95] и в случае двумерного течения без циркуляции [16]. Плоская волна с фронтом бесконечной ширины, как и вихревая нить, не может существовать в реальности, поскольку обладает бесконечным потоком энергии. При постановке физического эксперимента плоская волна и поле скоростей, индуцируемое вихревой нитью, могут быть созданы только в ограниченной области. Наблюдаемое рассеянное поле будет зависеть от конкретного вида падающей волны и течения и может быть разным в разных реализациях [22]. В численном эксперименте неоднозначность проявляется при постановке граничных условий. В [36] предложено ограничить область взаимодействия для того, чтобы сделать возможной постановку условия излучения: домножить поле скоростей вихря на $\exp(-r/L)$ или поле падающей волны на $\exp(-y^2/L^2)$, где $y = r \sin \theta$ — декартова координата вдоль волнового фронта, L — некоторый линейный масштаб. В обоих случаях было получено регулярное решение вида (3); вместе с тем в пределе $L \rightarrow \infty$, соответствующем случаю плоской волны и вихревой нити, каждое из решений было близко к некорректному выражению (i) вместо (ii). В [34] предложено ограничить вихревую нить областью покоящегося газа при $r > L$.

Поле скоростей цилиндрического вихря (1) с $\Gamma = \Gamma_* \exp(-r/L)$ из работы [36] близко к полу скоростей вихревой нити с $\Gamma = \Gamma_*$ в области $r \ll L$ и экспоненциально затухает в области $r \gg L$. Такой вихрь представляет собой вихревую нить с циркуляцией Γ_* , окружённую противоположно завихренным

слоем с суммарной циркуляцией $-\Gamma_*$. Исходя из этих соображений, оно подходит для постановки задачи рассеяния. Недостатком является отсутствие ясного механизма генерации такого течения. Между тем, цилиндрический вихрь (1) с $\Gamma = \Gamma_* \exp(-r^2/L^2)$ обладает аналогичными свойствами и может быть образован при вращении вокруг своей оси в вязкой несжимаемой жидкости бесконечно протяжённого бесконечно тонкого кругового цилиндра. Эффективный радиус вихря при этом увеличивается со временем как $L = 2\sqrt{\nu_\infty t}$, где ν_∞ — кинематический коэффициент вязкости. Решение данной задачи легко получается из решения задачи о диффузии точечного вихря [10], известного с 1912 г. [96]. Вместе с тем обобщение на случай вязкого сжимаемого газа, необходимое для решения задачи рассеяния звука в высших приближениях, до сих пор не было известно. Л. Мэк в 1960 г. построил стационарное решение для вихря, который мог бы возникнуть в сжимаемом газе при бесконечно долгом вращении кругового цилиндра [97]. Поле скоростей данного вихря затухает пропорционально r^{-1} при $r \rightarrow \infty$ и представляет собой обобщение вихревой нити в несжимаемой жидкости; задача рассеяния для него также была бы некорректно поставленной. Решение задачи о порождении вихря вращающимся в сжимаемом газе круговым цилиндром должно быть близким к решению Мэка в ближней области $r \ll L$. Приведём ещё несколько работ, посвящённых исследованиям течения жидкости вблизи цилиндра. В [10; 98] исследовались нестационарное и предельное стационарное течение, порождаемые вращающимся цилиндром с заданным расходом жидкости через его поверхность. Задачи, связанные с взаимодействием набегающего потока с вращающимся цилиндром, рассмотрены во многих публикациях, например, [98—100]. В [101; 102] изучалась устойчивость подвижного цилиндра в циркуляционном потоке. В [103] экспериментально и численно исследован эффект снижения лобового сопротивления цилиндра при турбулентном обтекании потоком с большими числами Маха.

Целью данной работы является выявление механизмов и определение характеристик диффузии и генерации вихрей в вязкой среде в присутствии твёрдых границ и взаимодействия вихрей с акустическими возмущениями на примере двух реализуемых на практике конфигураций.

Для достижения поставленной цели решены следующие **задачи**:

1. Определение сценариев эволюции пары прямолинейных вихревых нитей с равной по модулю и противоположной по знаку циркуляцией в вязкой несжимаемой жидкости вблизи твёрдой поверхности.

2. Определение асимптотических характеристик течения, возникающего в вязком сжимаемом газе при вращении кругового цилиндра, на больших временах при больших числах Рейнольдса в предположении осесимметричности.
3. Определение асимптотических характеристик взаимодействия плоской акустической волны с цилиндрическим вихрем из задачи 2 в невязком совершенном газе в случае, когда характерные числа Маха малы, а эффективный радиус вихря велик по сравнению длиной волны.
4. Определение асимптотических характеристик взаимодействия плоской акустической волны с вихревой парой вблизи твёрдой поверхности из задачи 1 в невязком совершенном газе в случае, когда характерные числа Маха малы, а расстояние между вихрями и высота вихрей над поверхностью велики по сравнению длиной волны.

Научная новизна:

1. Впервые дано описание локальной структуры нестационарного отрыва пограничного слоя, происходящего при взаимодействии вихрей с твёрдой поверхностью.
2. Впервые построено решение задачи о порождении вихря вращающимся цилиндром с учётом сжимаемости, удовлетворяющее условию затухания возмущений на бесконечности. Обнаружено явление «скачка циркуляции»: в сжимаемом газе с коэффициентом вязкости, зависящим от температуры, внутренний предел внешнего решения для циркуляции скорости в общем случае отличается от значения циркуляции на поверхности цилиндра.
3. Впервые получено решение, включающее в себя в качестве предельных случаев в различных асимптотических областях оба известных решения классической задачи взаимодействия плоской акустической волны с вихревой нитью.
4. Получено решение в дальнем поле задачи взаимодействия течения с акустическими возмущениями нового типа: рассеянная волна, отличная от цилиндрической и удовлетворяющая условию излучению Зоммерфельда.

Теоретическая и практическая значимость:

1. Качественное описание отрыва пограничного слоя в задаче об эволюции вихрей над твёрдой поверхностью может послужить опорой для развития теории нестационарного ламинарного отрыва.
2. Физическая интерпретация обнаруженных эффектов, таких, как «скакок циркуляции» в задаче о порождении вихря, может быть полезной для понимания физики более сложных течений сжимаемого газа с переменной вязкостью.
3. Установленные асимптотические решения для задачи о порождении вихря вращающимся цилиндром и для задачи о взаимодействии звука с цилиндрическим вихрем могут быть использованы для валидации численных методов и интерпретации соответствующих экспериментов.
4. Анализ решения задачи взаимодействия плоской акустической волны с экспоненциально затухающим цилиндрическим вихрем показывает, какое из двух известных решений для случая вихревой нити реализуется в физическом и численном эксперименте.
5. Новый масштаб длины, характерный для решения задачи взаимодействия звука с экспоненциально затухающим цилиндрическим вихрем и превосходящий как длину акустической волны, так и эффективный радиус вихря, определяет минимальный размер области, которую необходимо разрешать в физическом или численном эксперименте.

Методология и методы исследования:

1. Асимптотические методы решения уравнений в частных производных и вычисления интегралов с малым параметром, в том числе метод сращиваемых асимптотических разложений и метод перевала.
2. Методы программ символьной математики.
3. Конечно-объёмные и конечно-разностные алгоритмы численного решения уравнений Навье–Стокса.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Сценарий нестационарного ламинарного отрыва пограничного слоя при взаимодействии вихрей с твёрдой поверхностью.
2. Асимптотическое решение задачи о порождении цилиндрического вихря вращающимся круговым цилиндром в вязком сжимаемом газе на больших временах.

3. Асимптотическое решение задачи рассеяния плоской волны цилиндрическим вихрем с экспоненциально затухающим полем скорости в коротковолновом приближении.
4. Асимптотическое решение в дальнем поле задачи рассеяния плоской волны вихревой парой вблизи твёрдой поверхности.

Достоверность полученных результатов обеспечивается

1. Использованием классических уравнений гидродинамики, уравнений Навье–Стокса и линеаризованных уравнений Эйлера, с применением общепринятых методов интегрирования.
2. Согласованием асимптотических и численных решений в соответствующих областях пространства.
3. Согласованием с хорошо апробированными решениями других авторов в соответствующих пределах и диапазонах параметров.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались соискусителем лично на следующих конференциях и семинарах:

1. 58-я, 59-я, 60-я, 61-я, 62-я, 63-я научные конференции МФТИ (г. Жуковский, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020)
2. XXVII, XXVIII, XIX, XXX, XXXI научно-технические конференции по аэродинамике (п. Володарского, 2016, 2017; д. Богданова, 2018; п. Володарского, 2019, парк-отель Яхонты, 2020)
3. XVI Международная школа-семинар «Модели и методы аэродинамики» (г. Евпатория, 2016)
4. Международные конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (г. Сузdalь, 2018, 2020)
5. XIX Международная конференция по методам аэрофизических исследований (ICMAR 2018, г. Новосибирск, 2018)
6. Седьмая всероссийская конференция с международным участием «Тепломассообмен и гидродинамика в закрученных потоках» (г. Рыбинск, 2019)
7. IX Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (г. Новосибирск, 2020)
8. 11-я международная конференция — школа молодых учёных «Волны и вихри в сложных средах» (г. Москва, 2020)
9. Международная научная конференция по механике «IX Поляховские чтения» (г. Санкт-Петербург, 2021)

10. 25th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (г. Милан, Италия, 2021)
11. Седьмая Открытая Всероссийская (XIX научно-техническая) конференция по Аэроакустике (г. Геленджик, 2021)
12. Семинар по механике сплошных сред под руководством А.Г. Куликовского, В.П. Карликова, О.Э. Мельника, А. Н. Осипцова (г. Москва, НИИ механики МГУ, 12 мая 2021)
13. Видеосеминар по аэромеханике ЦАГИ – ИТПМ СО РАН – СПбГПУ – НИИМ МГУ (г. Жуковский, ЦАГИ, 7 сентября 2021)

Личный вклад. Результаты глав 1 и 3 получены соискателем самостоятельно под руководством А. М. Гайфуллина. Вклад соискателя в работы [1—5] составляет 4/5. Результаты главы 2 получены совместно с А. М. Гайфуллиным и А. В. Зубцовым. Вклад соискателя в работы [6—9] составляет 1/3.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 9 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 9 – в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 6 – в тезисах докладов.

Соответствие паспорту специальности. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.02.05 «Механика жидкости, газа и плазмы» по следующим пунктам:

- п. 4: течения сжимаемых сред и ударные волны;
- п. 11: пограничные слои, слои смешения, течения в следе;
- п. 14: линейные и нелинейные волны в жидкостях и газах;
- п. 15: тепломассоперенос в газах и жидкостях;
- п. 18: аналитические, асимптотические и численные методы исследования уравнений кинетических и континуальных моделей однородных и многофазных сред (конечно-разностные, спектральные, методы конечного объема, методы прямого моделирования и др.).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и 1 приложения. Полный объём диссертации составляет 120 страниц, включая 40 рисунков и 2 таблицы. Список литературы содержит 128 наименований.

Содержание работы:

Во **введении** дана общая характеристика работы и приведён обзор используемых источников литературы.

В главе 1 на примере задачи о паре точечных вихрей с равными по модулю и противоположными по знаку циркуляциями вблизи бесконечной плоской твёрдой поверхности исследована диффузия вихрей в вязкой несжимаемой жидкости в присутствии твёрдых границ. Описана математическая постановка задачи в рамках нестационарных двумерных уравнений Навье–Стокса. Приведены начальное условие в момент времени $t = 0$ для поля скорости, индуцируемого вихревой парой и отражением вихревой пары относительно твёрдой поверхности, и граничные условия: условие прилипания на твёрдой поверхности, условие отсутствия особенностей при $t > 0$ и условие затухания поля скорости на бесконечности. Представлено асимптотическое решение задачи на малых временах при больших числах Рейнольдса для случая ламинарного течения и определены границы его применимости. Сформулирована численная постановка задачи на больших временах на основе полных уравнений Навье–Стокса. Показано, что пограничный слой терпит отрыв от твердой поверхности. Приведены поля завихренности и линии тока в различные моменты времени, а также профиль продольной скорости вблизи твёрдой поверхности в точке отрыва. Показано, что отрыв пограничного слоя является глобальным и нестационарным. Определена эволюция областей с замкнутыми линиями тока, возникающих за точкой отрыва. Установлено изменение динамики вихрей в результате взаимодействия вихрей с завихренностью, отходящей от твёрдой поверхности. Циркуляция вихрей уменьшается со временем значительно быстрее, чем в задаче о диффузии пары точечных вихрей в несжимаемой жидкости без твёрдых границ. Траектории движения центров вихрей на больших временах качественно отличаются от случая идеального безотрывного течения: вместо движения параллельно поверхности с постоянной скоростью вихри отдаляются от поверхности, а скорость их движения со временем уменьшается.

В главе 2 рассмотрена двумерная задача о вихре, возникающем при вращении круга (бесконечно протяжённого кругового цилиндра) в вязком теплопроводном сжимаемом совершенном газе с линейной зависимостью коэффициентов динамической вязкости и теплопроводности от температуры. Сформулирована постановка задачи в рамках осесимметричных уравнений Навье–Стокса сжимаемого газа с начальным условием в виде невозмущённого газа, условиями прилипания и изотермичности на поверхности цилиндра и условием затухания возмущений на бесконечности. Получено асимптотическое решение при больших числах Рейнольдса на больших временах, на которых

характерный размер вязкой области $\sqrt{\nu_\infty t}$, где ν_∞ – кинематический коэффициент вязкости невозмущённого газа, намного превосходит радиус цилиндра r_* . Решение во внутренней $r \sim r_*$ и внешней $r \sim \sqrt{\nu_\infty t}$ областях представлено в виде ряда по параметру $r_*/\sqrt{\nu_\infty t} \rightarrow 0$. С помощью принципа сращивания и метода мультипликативного составления построено равномерно пригодное решение с точностью до членов второго порядка малости. Показано, что в области $r \sim r_*$ решение в основном приближении стационарно. Обнаружена немонотонная зависимость циркуляции окружной скорости от радиальной координаты, что качественно отличает случай сжимаемого газа с переменной вязкостью от случая несжимаемой жидкости, в котором циркуляция во внутренней области постоянна. В области $r \sim \sqrt{\nu_\infty t}$ решение в основном приближении автомодельно. Показано, что решение для циркуляции совпадает с решением в случае несжимаемой жидкости с точностью до постоянного множителя, причём циркуляция в газе с возрастающей зависимостью коэффициента динамической вязкости от температуры при температуре поверхности цилиндра выше или равной температуре невозмущённого газа строго больше циркуляции в несжимаемой жидкости. При числах Маха $M \ll 1$ уравнения в основном приближении линейны и решение получено в аналитическом виде. При $M = O(1)$ уравнения линейны только во внешней области; во внутренней области решение получено численным интегрированием обыкновенных дифференциальных уравнений. Представлена валидация асимптотического решения численным интегрированием полных уравнений Навье–Стокса.

В главе 3 рассмотрены две задачи о взаимодействии стационарных вихревых течений невязкого сжимаемого совершенного газа с плоской монохроматической звуковой волной малой амплитуды. Использовано приближение малых чисел Маха, в котором течение удовлетворяет уравнениям Эйлера несжимаемой жидкости. Решение представлено в виде суперпозиции поля вихревого течения и падающего акустического поля, заданных по условию, и искомого рассеянного поля. В борновском приближении, при котором амплитуда рассеянной волны предполагается малой по сравнению с амплитудой падающей волны, уравнения Эйлера сжимаемого газа сводятся к волновому уравнению с источником известного вида. В случае периодического по времени решения волновое уравнение сводится к уравнению Гельмгольца, решение которого с граничным условием излучения Зоммерфельда представлено в виде свёртки источникового члена с функцией Грина. Определено условие существования и

единственности решения: поле скорости течения должно затухать на бесконечности быстрее, чем $r^{-3/2}$.

В первой задаче рассмотрен случай цилиндрического вихря с распределением циркуляции по радиусу пропорциональным $\exp(-r^2/L^2)$, который может быть создан продолжительным вращением кругового цилиндра в вязкой несжимаемой жидкости, что соответствует вихрю из [главы 2](#) при $M = 0$. В области $r \ll L$ такой вихрь близок к потенциальному вихрю, для которого задача рассеяния плоской волны в борновском приближении не может быть поставлена корректно. С помощью асимптотического вычисления интеграла свёртки рассчитано рассеянное поле в главном приближении при $\lambda/L \rightarrow 0$, где λ – длина акустической волны. Результаты подтверждаются численным интегрированием. Определена асимптотическая структура решения. В области $r \gg L^2/\lambda$ получено решение вида уходящей на бесконечность цилиндрической волны с максимумом амплитуды на малых углах рассеяния $O(\lambda/L)$. В области $r = O(L^2/\lambda)$ амплитуда волны сохраняет порядок. Таким образом, обнаружен характерный пространственный масштаб L^2/λ , превосходящий как эффективный радиус вихря L , так и длину волны. Произведено сравнение с двумя качественно отличными друг от друга выражениями, известными из попыток решения задачи рассеяния плоской волны потенциальным вихрем. Показано, что каждое из выражений совпадает с главным приближением полученного решения в некоторой асимптотической области.

Во второй задаче рассмотрен случай двух точечных вихрей с противоположными циркуляциями вблизи бесконечной плоской твёрдой поверхности из [главы 1](#), причём звуковая волна исходит от источников на поверхности. Вихри считаются неподвижными. Получено асимптотическое решение в дальнем поле. Показано, что, в отличие от задач рассеяния в пространстве без твёрдых границ, амплитуда рассеяния является комплекснозначной величиной и линии волнового фронта отличны от окружностей.

В [приложении А](#) описано вычисление интеграла свёртки в области $r = O(L^2/\lambda)$ из первой задачи [главы 3](#) с помощью метода перевала.

Глава 1. Эволюция вихревой пары вблизи твёрдой поверхности

Результаты главы опубликованы в работах [1—3].

1.1 Постановка задачи

Рассмотрим плоское нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости при условии, что в начальный момент времени $t = 0$ имеется поле скоростей, которое индуцируют два точечных вихря с интенсивностями $\pm\Gamma_0$ и координатами $y = h$, $x = \pm l$ над твердой поверхностью $y = 0$. Будем считать, что правый вихрь положителен, т. е. жидкость вокруг него вращается против часовой стрелки. Введем обозначения u , v — компоненты скорости вдоль осей x , y ; Ω — завихренность; $\text{Re} = \Gamma_0/\nu_\infty$ — число Рейнольдса, ν_∞ — кинематический коэффициент вязкости. Определим безразмерные величины $\bar{x} = x/l$, $\bar{y} = y/l$, $\bar{h} = h/l$, $\bar{t} = \Gamma_0 t/l^2$, $\bar{u} = u l / \Gamma_0$, $\bar{v} = v l / \Gamma_0$, $\bar{\Omega} = l^2 \Omega / \Gamma_0$. Чёрточки в дальнейшем будут опущены. Характеристики течения должны удовлетворять уравнениям для несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \Omega. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Начальное условие для уравнений (1.1) соответствует полю скоростей от двух вихрей над плоскостью и двух фиктивных отраженных вихрей. Комплексно сопряженная скорость в точке $z = x + iy$ при $t = 0$ будет определяться соотношением

$$u - iv = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{z - 1 - ih} - \frac{1}{z + 1 - ih} + \frac{1}{z + 1 + ih} - \frac{1}{z - 1 + ih} \right)$$

В силу симметрии можно решать систему уравнений (1.1) только в правой полуплоскости. Перейдем к постановке граничных условий при $t > 0$. Условие на оси симметрии:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Условие прилипания на твердой поверхности:

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Условие затухания скорости на бесконечности:

$$u^2 + v^2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty.$$

Условие отсутствия во всем течении особенностей в скорости:

$$u^2 + v^2 < \infty.$$

Решение задачи зависит от двух параметров — числа Re и начальной относительной высоты вихрей h . Исследования ограничивались случаем $\text{Re} \gg 1$ и $h = O(1)$.

1.2 Решение на малых временах

Легко анализируется движение двух дискретных вихрей над твердой поверхностью в идеальной жидкости. Если $x_v(t)$, $y_v(t)$ — координаты правого вихря, то

$$\frac{dx_v}{dt} = \frac{1}{4\pi} \frac{x_v^2}{y_v(x_v^2 + y_v^2)}, \quad \frac{dy_v}{dt} = -\frac{1}{4\pi} \frac{y_v^2}{x_v(x_v^2 + y_v^2)}. \quad (1.2)$$

Отсюда определяется связь между координатами вихря

$$x_v^{-2} + y_v^{-2} = 1 + h^{-2}. \quad (1.3)$$

Из соотношений (1.2) и (1.3) следует, что с течением времени абсцисса вихря увеличивается, а ордината уменьшается. Кроме того, при больших t вихрь движется на некоторой постоянной высоте $y_v = h/\sqrt{1+h^2}$, а расстояние до оси симметрии растёт пропорционально времени.

Рассмотрим теперь эволюцию вихрей в вязкой жидкости. Основная трудность при численном интегрировании уравнений (1.1) с соответствующими граничными условиями заключается в том, что поле завихренности при $t = 0$ имеет особенность при приближении к вихрям и к твердой поверхности. Вместе с тем на малых временах влияние вязкости будет локализовано вблизи центров

вихрей и твердой поверхности. Размеры вязких областей будут расти пропорционально $\sqrt{t/\text{Re}}$, т. е. будут намного меньше размера области, в которой происходит перемещение вихрей. Поэтому наличие вязких областей будет слабо сказываться на траектории центров вихрей, она по-прежнему будет близка к решению уравнения (1.2). В самих вязких областях для описания характеристик течения можно использовать вместо уравнений (1.1) уравнения пограничного слоя. Таким образом, на малых временах завихренность вблизи вихря будет диффундировать так же, как в классической задаче одиночного вихря

$$\Omega = \frac{\text{Re}}{4\pi t} e^{-r^2 \text{Re}/4t}, \quad (1.4)$$

где $r = \sqrt{(x - x_v)^2 + (y - y_v)^2}$. Около твердой поверхности в основном приближении имеем

$$\begin{aligned} t \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} y_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} + tu \frac{\partial u}{\partial x} + tv_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} &= t \frac{\partial u_e}{\partial t} + tu_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $y_1 = y/\delta$, $v_1 = v/\delta$, $u_e(x, t)$ — скорость, которую индуцируют вихри на твердой поверхности, $\delta = \sqrt{t/\text{Re}}$ — безразмерная толщина пограничного слоя. Граничные условия для уравнений (1.5): условие прилипания при $y_1 = 0$, условие выхода на внешнее невязкое решение $u(x, y_1, t) = u_e(x, t)$ при $y_1 \rightarrow \infty$ и условие симметрии $u = 0$ при $x = 0$. Кроме того, при $t = 0$ из (1.5) следует

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{1}{2} y_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} = 0,$$

откуда получаем начальное условие

$$u(x, y_1, 0) = \frac{u_e(x, 0)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y_1} e^{-y_1^2/4} dy_1.$$

Поле завихренности, которое возникло вблизи центров вихрей (точек с максимальной по модулю завихренностью) и твердой поверхности, определяет скорости перемещения вихрей. Поле скоростей, индуцированное завихренностью около вихрей, будет аналогично полю от точечных вихрей. Пограничный слой около твердой поверхности будет оказывать вытесняющее действие, которое эквивалентно распределенным по поверхности источникам с интенсивностью

$$2 \frac{\Gamma_0}{l} \frac{d}{dx} (u_e \delta^*),$$

где

$$\delta^* = \sqrt{\frac{t}{\text{Re}}} \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy_1.$$

Таким образом, изменение координаты правого вихря определяется соотношением

$$\frac{d\bar{z}_v}{dt} = \frac{1}{4\pi i} \left(-\frac{1}{x_v} + \frac{1}{z_v} + \frac{i}{y_v} \right) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\frac{d}{d\xi} (u_e(\xi) \delta^*(\xi))}{z_v - \xi} d\xi, \quad (1.6)$$

где $z_v = x_v + iy_v$, $z_v(0) = 1 + ih$.

Результаты численного решения уравнений (1.5) и (1.6) показывают, что по мере опускания вихрей профиль горизонтальной составляющей скорости в пограничном слое становится менее наполненным, и в некоторый момент времени $t = t_s$ в точке на твердой поверхности $x = x_s$ производная $\partial u / \partial y_1$ обращается в нуль (предотрывное течение). При $\text{Re} = 1000$ и высоте $h = 1$ получается $t_s \approx 4$, а при $h = 2$ момент обращения в нуль трения наступает значительно позже — $t_s \approx 14$. Результаты близки к результатам работы [43], где при $h = 1$ получается $t_s \approx 3.93$.

Решение уравнений (1.5) на временах $t > t_s$ при $x \approx x_s$ и $x > x_s$ невозможно. Вместе с тем, нет необходимости производить расчет и до $t = t_s$. Разделение на области было произведено из-за необходимости устранения особенностей в распределении завихренности. Поэтому расчет уравнений пограничного слоя производился до времени $t = t_0 < t_s$.

1.3 Решение на больших временах

Начиная с момента $t = t_0$ и до рейнольдсовски больших времен, на которых циркуляция вихрей сильно уменьшается [41], решение задачи определяется из совместного решения ее в разных областях.

Введем функцию тока $u = \partial\Psi/\partial y$, $v = -\partial\Psi/\partial x$. В области

$$0 \leq x \leq x_k,$$

$0 \leq y \leq y_k$ численное интегрирование уравнений (1.1) производится в переменных Ω, Ψ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= -\Omega. \end{aligned} \quad (1.7)$$

При $x > x_k$ вблизи твердой поверхности в главном приближении справедливы уравнения пограничного слоя (1.5). На практически всем участке пограничного слоя безразмерная толщина его по-прежнему растет пропорционально $\sqrt{t/\text{Re}}$, и, следовательно, при $t/\text{Re} = O(1)$ толщина $\delta = O(1)$, т. е. толщина пограничного слоя становится порядка размера расчетной области y_k для уравнений (1.7). Влияние пограничного слоя при $x > x_k$ на характеристики течения в области $0 \leq x \leq x_k$ может оказаться существенным, и поэтому его следует учесть при решении уравнений (1.7).

Определим граничные условия для уравнений (1.7) и (1.5). Для первого уравнения из системы (1.7) на линии симметрии $x = 0$ ставится условие $\Omega = 0$. Размер расчетной области y_k должен быть достаточно большим, поэтому при $y = y_k$ считается, что течение в главном приближении незавихренно — $\Omega = 0$. На линии $x = x_k$ ставится мягкое граничное условие $\partial \Omega / \partial x = 0$ и, наконец, на твердой границе $y = 0$ ставится условие прилипания. В численной реализации условие прилипания аппроксимируется условием Тома [104]. Начальное распределение Ω соответствует взятому в момент $t = t_0$ решению задачи на малых временах, т. е. суперпозиции решения уравнений (1.5) для пограничного слоя и решения (1.4) для вихрей.

Для второго уравнения (1.7) линии $x = 0$ и $y = 0$ будем считать соответствующими нулевой линии тока $\Psi = 0$. На двух линиях $x = x_k$ и $y = y_k$

$$\Psi(x, y, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(\xi, \eta, t) \ln \left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \right] d\xi d\eta,$$

где интегрирование ведется по всей плоскости $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$, причем считается, что в полуплоскости $y < 0$ завихренность распределена следующим образом:

$$\Omega(x, y, t) = -\Omega(x, -y, t).$$

Для уравнений (1.5) ставятся условия $u(x, 0, t) = 0$, $u(x, \infty, t) = u_e(x, t)$; $u(x_k, y_1, t)$ соответствует профилю скорости, получаемому из решения системы уравнений (1.7) при $x = x_k$. Здесь $u_e(x, t)$ — скорость, которую индуцирует завихренность, распределенная в области решения уравнений Навье-Стокса

$$0 \leq x \leq x_k,$$

$0 \leq y \leq y_k$, на твердой поверхности $y = 0$ при $x > x_k$. Начальное условие $u(x, y_1, t_0)$ определяется из решения на малых временах при $t = t_0$.

Распределение завихренности в ограниченной области $-x_k \leq x \leq x_k$ в основном сосредоточено в окрестности центров вихрей (точек с максимальным абсолютным значением завихренности в области диффундирующего вихря) $x = \pm x_v$, $y = y_v$, в пограничном слое и в слое смешения, являющемся продолжением пограничного слоя, что определяет асимптотическое распределение скорости $u_e(x, t)$ на больших расстояниях от центров вихрей:

$$u_e(x, t) = \frac{U_e(t)}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^5}\right) \quad \text{при } x \gg x_v. \quad (1.8)$$

При этом $U_e(t) > 0$ и профиль скорости в пограничном слое можно представить в виде

$$u(x, y_1, t) = \frac{U(y_1, t)}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^5}\right),$$

где $U(y_1, t)$ подчиняется уравнению

$$t \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{2} y_1 \frac{\partial U}{\partial y_1} = t \frac{dU_e}{dt} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} \quad (1.9)$$

и граничным условиям $U(0, t) = 0$, $U(\infty, t) = U_e$.

Таким образом, расчет пограничного слоя производится с помощью уравнений (1.5) при сравнительно небольших $x \geq x_k$, а при $x \gg x_v$ с помощью уравнения (1.9).

1.4 Нестационарный отрыв пограничного слоя

На малых временах вся завихренность сосредоточена в окрестностях центров вихрей и в пограничном слое вблизи поверхности. Характерные размеры

завихренных областей порядка $\sqrt{t/\text{Re}}$. По мере опускания вихрей неблагоприятный градиент давления вдоль твёрдой поверхности, возникающий в связи с неоднородностью потенциального поля скоростей типа индуцированного вихрями, растёт, что в определённый момент $t = t_s$ приводит к отрыву пограничного слоя [66; 2]. Численные результаты, приведенные в данном разделе, относятся к случаю $\text{Re} = 8000$, $h = 8$. При данных значениях параметров $t_s = 94$.

Неблагоприятный градиент давления при $x > 0$ в основном индуцирован правым вихрем, который из-за экранного эффекта будет удаляться от оси симметрии; в том же направлении будет перемещаться и точка отрыва. Таким образом, отрыв будет нестационарным. Обозначим за u' продольную скорость в системе координат, связанной с точкой отрыва. Тогда, согласно критерию Мура – Ротта – Сирса, отрыв произойдёт в точке, в которой $u' = 0$, $\partial u'/\partial y = 0$. Координаты точки отрыва в неподвижной системе отсчёта обозначим $x = x_s$, $y = y_s$. Подвижная система координат будет удаляться от оси симметрии со скоростью dx_s/dt . В момент $t = 120$ отрыв происходит в точке $x_s = 2.85$, $y_s = 0.07$ (рисунок 11).

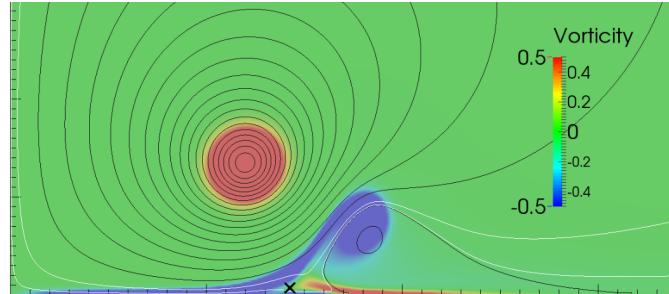


Рисунок 11 — Поле завихренности и линии тока в момент времени $t = 120$, $\text{Re} = 8000$, $h = 8$ в неподвижной системе координат. Интервал между линиями тока $\Delta\psi = 0.02$. Белые линии тока соответствуют значениям $\psi = 0.005$, $\psi = 0.0005$ (линия тока на поверхности соответствует $\psi = 0$). Маркером отмечена точка отрыва $x_s = 2.85$, $y_s = 0.07$

Результаты расчёта показывают, что при приближении слева к x_s трение в точке, в которой $u' = 0$, будет стремиться к нулю (рисунок 12, сп. с рисунком 6) согласно механизму, описанному Ф. Муром [54; 59].

В окрестности точки $x = x_s$ верхняя часть пограничного слоя $y > y_s$ оторвётся от твёрдой поверхности, переходя в завихренный слой смешения (рисунок 11). Нижняя часть $y < y_s$ будет по-прежнему прилегать к поверхности,

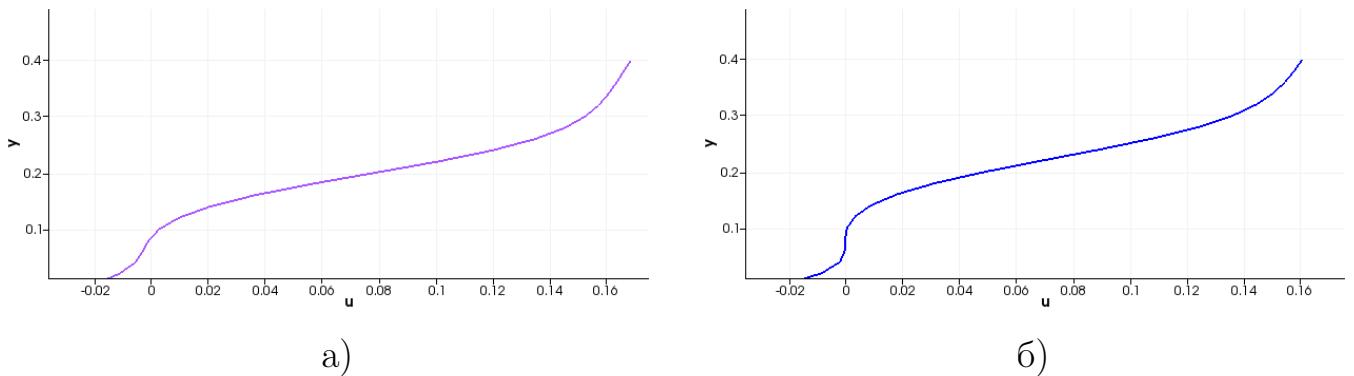


Рисунок 12 – Профили продольной скорости $u(y)$ в пограничном слое при $t = 120$, $Re = 8000$, $h = 8$ в системе координат, связанной с точкой отрыва: а – в точке $x = 2.8$, б – в точке $x = x_s = 2.85$

поскольку трение при $y = 0$ будет оставаться положительным вплоть до некоторой точки $x = x'_s$, в которой $\partial u / \partial y = 0$. Таким образом, в неподвижной системе координат приповерхностная линия тока $\Psi = 0$ отделяется от твёрдой поверхности в точке нулевого трения $x = x'_s$, отличной от точки отрыва $x = x_s$ (рисунки 11, 13а). За точкой x'_s образуется область с замкнутыми линиями тока, которая заканчивается точкой присоединения x'_r , где $\partial u / \partial y$ также обращается в нуль. Размеры рециркуляционной области в обоих направлениях порядка единицы. Эта область перемещается вниз по потоку быстрее, чем точка отрыва x_s . Решение качественно совпадает с решением из [40; 48] для случая одиночного вихря над плоскостью.

Слой смешения, выходящий из точки отрыва x_s , представляет собой диффундирующую вихревую пелену, спиральное ядро которой образует концентрированный вихрь (рисунки 13, 16). Этот концентрированный вихрь с отрицательной циркуляцией будет поддерживать существование рециркуляционной области в течение длительного времени. Распределение завихренности внутри рециркуляционной области будет неоднородным; нарушение теоремы Прандтля – Бэтчелора [10] объясняется нестационарностью течения. Тонкая область на дне рециркуляционной зоны, примыкающая к твёрдой поверхности, подчиняется уравнениям пограничного слоя. Приближение потока к критической точке x'_s будет, как и с противоположной стороны, происходить под действием неблагоприятного градиента давления (рисунок 14), что приведёт к отрыву пограничного слоя и сходу во внешний поток завихренности положительного знака.

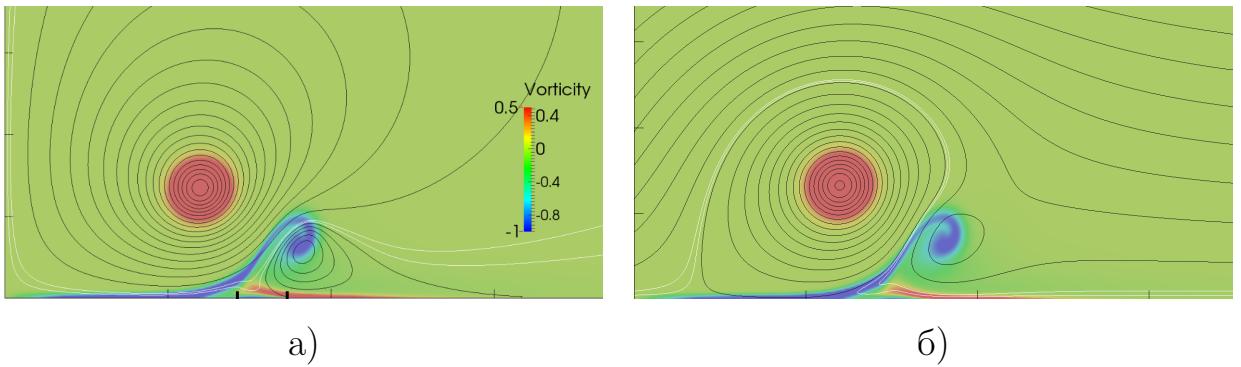


Рисунок 13 — Поле завихренности и линии тока в момент времени $t = 120$, $\text{Re} = 8000$, $h = 8$: а – в неподвижной системе координат, б – в системе координат, в которой горизонтальная скорость центра вихря равна нулю. Интервал между линиями тока $\Delta\psi = 0.02$, в рециркуляционной области на рисунок 13а $\Delta\psi = 0.005$. Белые линии тока соответствуют значениям $\psi = 0.0025$, $\psi = 0.005$ на рисунок 13а и $\psi = -0.0025$, $\psi = -0.005$ на рисунок 13б. Левая жирная черта на рисунок 13а обозначает координату $x = x_s$, правая – $x = x'_s$

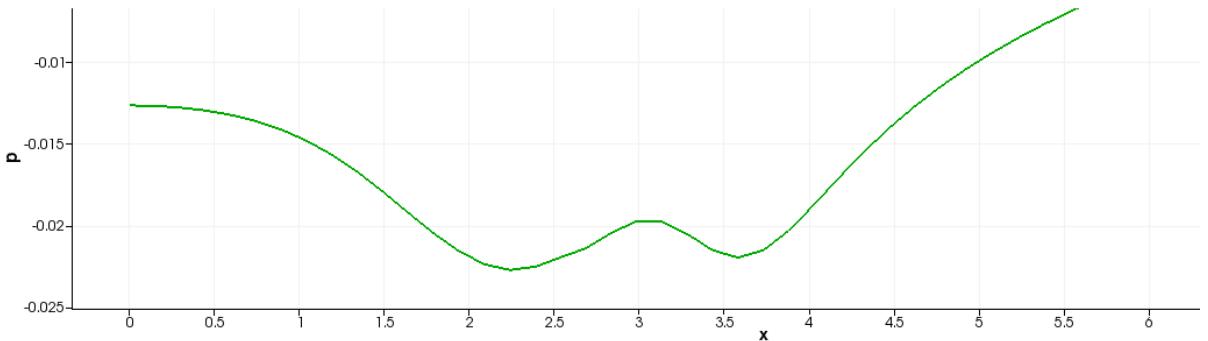


Рисунок 14 — Распределение давления вдоль твёрдой поверхности $p(x)$ при $t = 120$, $\text{Re} = 8000$, $h = 8$

Оторвавшийся положительно завихренный слой примкнёт к слою из отрицательной завихренности, в пределе при $\text{Re} \rightarrow \infty$ образуя λ -отрыв, что подтверждается картиной линий тока (рисунок 13б). За точкой отрыва x_s может образоваться многовихревое разнонаправленное течение (рисунок 16в).

Со временем поперечный размер рециркуляционной области увеличивается (рисунок 16а), что в итоге приводит к её «расколу» на две части (рисунок 16б), одна из которых – прилегающая к поверхности – вскоре исчезает, а другая, «подпитываемая» концентрированным вихрем слоя смешения, выходит во внешний поток и начинает вращаться вокруг самолётного вихря. Вследствие этого вдали от поверхности появляется точка, при приближении к которой скорость течения стремится к нулю. В определённый момент вблизи оси симметрии

возникает капсула (рисунок 16г), ограниченная линией тока $\psi = 0$; таким образом, на оси симметрии появляются две критические точки. Капсула опускается вниз и спустя некоторое время присоединяется к твёрдой поверхности (рисунок 16д), после чего перемещается вдоль неё.

В то время как область с замкнутыми линиями тока (часть области $x'_s < x < x'_r$) отойдёт достаточно далеко от точки отрыва x_s , в окрестности точки x_s на твёрдой поверхности вновь появится точка с нулевым трением, сразу за которой образуется ещё одна рециркуляционная область (рисунок 16б) с концентрированным вихрем (рисунок 16г). В этот момент времени $x_s \approx x'_s$, т. е. отрыв близок к стационарному. Дальнейшая эволюция новой рециркуляционной области будет происходить аналогично старой. При $t = 200$ к поверхности будут прилегать две рециркуляционных зоны, одна из которых образовалась в момент начала отрыва $t = t_s$ и сделала почти полный оборот вокруг вихря (рисунок 16д), а другая — в момент $t = t_{s1} = 132$. К моменту $t = 230$ вторая область расколется, а первая сольётся с третьей, возникшей при $t = t_{s2} = 209$, в единую рециркуляционную зону (рисунок 16е), которая будет вести себя аналогично предыдущим. Вихревая структура из завихренности отрицательного знака представляет собой концентрированные вихри, образовавшиеся из спиральных вихревых пелен и соединённых между собой тонким непрерывным слоем со сравнительно малой завихренностью (рисунок 15).

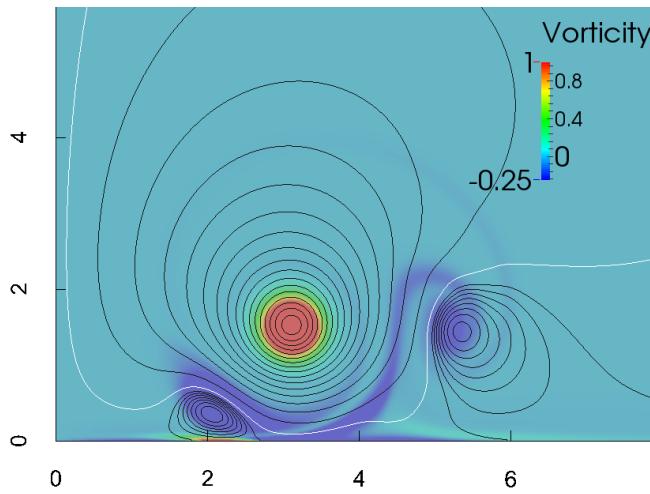


Рисунок 15 — Поле завихренности и линии тока при $t = 200$, $Re = 8000$, $h = 8$ в неподвижной системе координат. Интервал между линиями тока $\Delta\psi = 0.02$, в рециркуляционной области $\Delta\psi = 0.002$

1.5 Диссипация завихренности

Со временем циркуляция вихрей уменьшается. Известна зависимость циркуляции от времени при $h = \infty$ [41]. При этом под термином циркуляция понимается циркуляция скорости по контуру, охватывающему правую (или левую) половину овального контура, опускающегося вместе с вихрями. Если $h = O(1)$, то, как видно из рисунка 16, такую процедуру вычисления циркуляции провести нельзя, так как нет замкнутого контура, перемещающегося вместе с вихрями. Для определения характеристик вихря вычислим циркуляцию по окружности с центром, совпадающим с центром вихря, через поток завихренности

$$\Gamma(r, t) = \int_{(x-x_v)^2 + (y-y_v)^2 \leq r^2} \Omega(x, y, t) dx dy.$$

Выделим два значения циркуляции $\Gamma_1(t) = \max_r \Gamma(r, t)$ и $\Gamma_2(t) = \Gamma(r, t)|_{r=\min(x_v, y_v)}$. Функции $\Gamma_1(t)$ соответствует окружность, на которой значение циркуляции максимально, $\Gamma_2(t)$ — окружность максимального радиуса, которая не заходит за границы первого квадранта. Изменение этих величин со временем для двух значений h представлено на рисунке 17. Наличие твёрдой поверхности значительно ускоряет убывание циркуляции вихрей. Причиной этого является качественное различие механизмов потери циркуляции. В отсутствие поверхности вихри диссирируют только из-за взаимодействия между собой. При наличии поверхности вихри диссирируют из-за взаимодействия с противоположно завихренным слоем, отходящим от твёрдой поверхности.

1.6 Траектории движения вихрей

Траектория движения центра правого вихря сильно отличается от траектории вихрей (1.3) в идеальной жидкости (рисунок 18). Слой смешения индуцирует на вихре положительную вертикальную и отрицательную горизонтальную скорость, тормозя, а в некоторые моменты, возможно, даже обращая движение вихря, и заставляя его подниматься вверх — явление, известное как «подскок» вихря [46]. Существует критическое число Рейнольдса $Re_*(h)$, при

котором вид траектории меняется. При $Re \leq Re_*$ в некоторый момент времени высота вихря достигает минимума, после чего координаты вихрей монотонно увеличиваются (рисунок 18а). При $Re > Re_*$ после достижения наименьшей высоты координаты вихря меняются немонотонно (рисунок 18б). На больших временах направление перемещения вихря не меняется, скорость перемещения со временем падает. При $h = 2$ численное исследование показало, что течение при $Re = 1000$ является докритическим, а при $Re = 2000$ — сверхкритическим.

1.7 Выводы по главе 1

Исследована эволюция пары вихрей с противоположными циркуляциями вблизи бесконечной плоской твердой поверхности в вязкой несжимаемой жидкости.

Показано, что взаимодействие с поверхностью играет существенную роль в процессе уменьшения циркуляции вихрей со временем. Основным механизмом диссипации завихренности является взаимодействие вихрей с отрывающимся от твердой поверхности пограничным слоем, в то время как при эволюции пары вихрей в пространстве без твёрдых границ — взаимодействие вихрей между собой [41].

Нестационарный отрыв пограничного слоя от поверхности происходит по механизму, описанному Ф. Муром [59]. Нижняя часть пограничного слоя остаётся присоединённой; верхняя отрывается и образует концентрированный вихрь, порождающий рециркуляционную область. Движение оторвавшейся части пограничного слоя вызывает «раскол» рециркуляционной области на части; одна из частей отходит от поверхности и движется вместе с вихрем, что приводит к появлению в области течения критических точек, а другая исчезает. Рециркуляционные области, возникающие в окрестности точки отрыва в дальнейшем, будут эволюционировать аналогично.

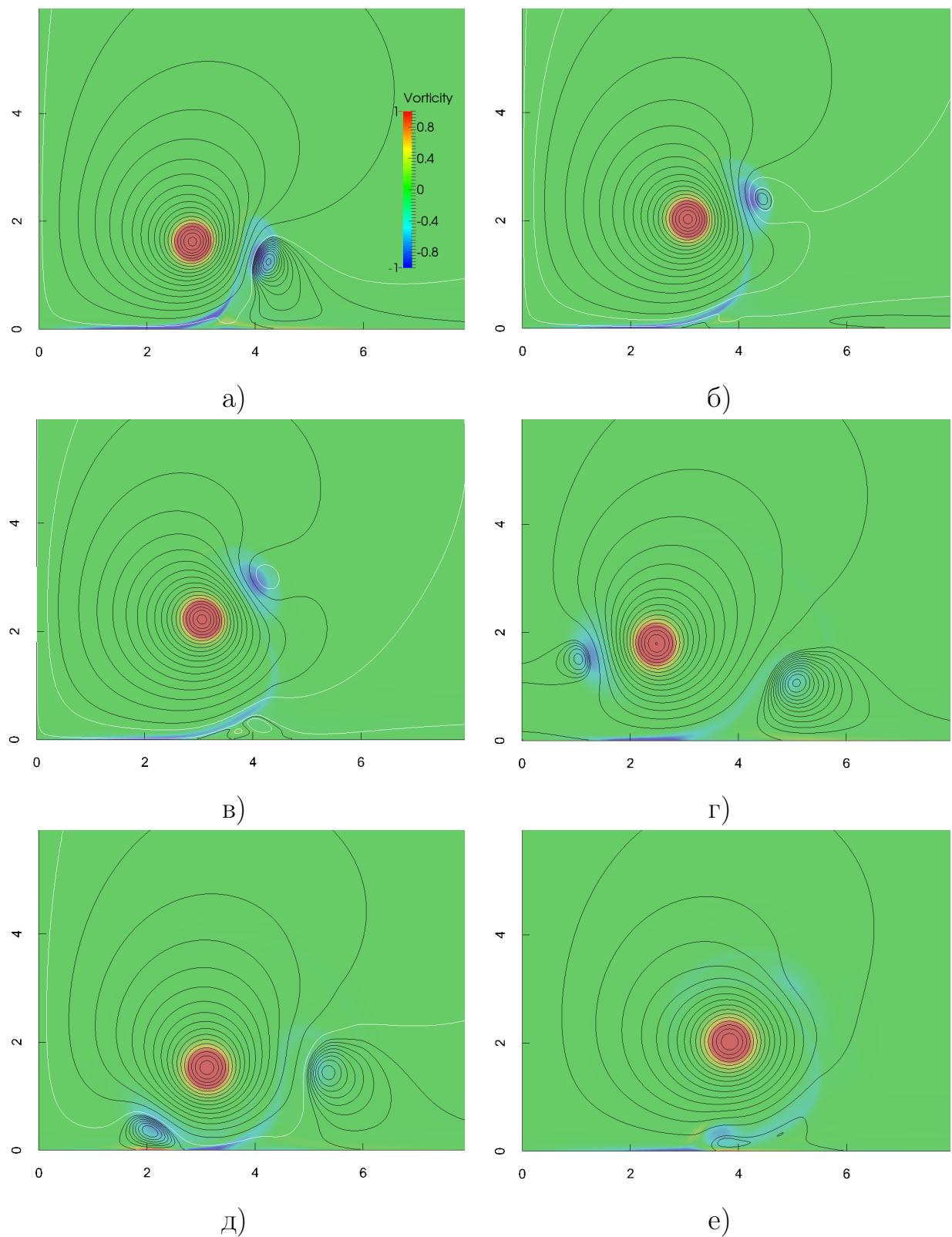


Рисунок 16 — Поле завихренности и линии тока при $\text{Re} = 8000, h = 8$ в моменты времени: а — $t = 130$, б — $t = 140$, в — $t = 145$, г — $t = 184$, д — $t = 200$, е — $t = 230$

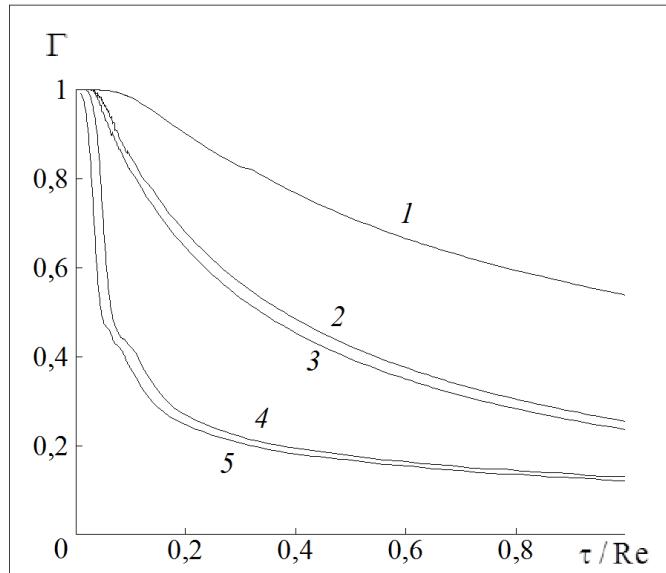


Рисунок 17 — Уменьшение со временем циркуляции правого вихря при $Re = 1000$: 1 — Γ при $h = \infty$ из [41], 2 — Γ_1 при $h = 3$, 3 — Γ_1 при $h = 2$, 4 — Γ_2 при $h = 3$, 5 — Γ_2 при $h = 2$

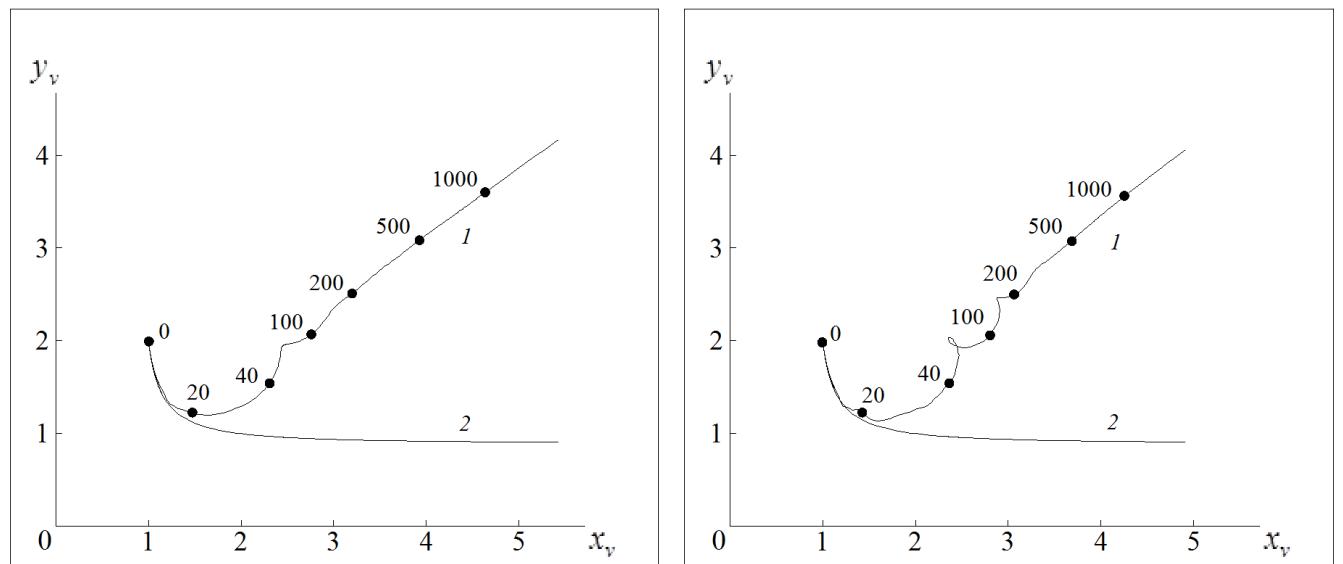


Рисунок 18 — Траектории движения центра правого вихря $x_v(t)$, $y_v(t)$ при $h = 2$: 1 — при конечном Re (числами отмечены моменты времени t , соответствующие положениям вихря), 2 — в идеальной жидкости; а — $Re = 1000$, б — $Re = 2000$

Глава 2. Порождение вихря вращением кругового цилиндра в вязком сжимаемом газе

Результаты главы опубликованы в работах [6—9].

2.1 Постановка задачи

Пусть бесконечный по протяженности круговой цилиндр радиуса r_* помещен в покоящийся вязкий совершенный газ с температурой $T = T_\infty$, плотностью $\rho = \rho_\infty$ и коэффициентами динамической вязкости $\mu = \mu_\infty$ и теплопроводности $\lambda = \lambda_\infty$. В момент времени $t = 0$ цилиндр начинает вращаться вокруг своей оси с угловой скоростью w_*/r_* , которая поддерживается постоянной. Исследуется возмущенное состояние газа при $t > 0$ при условии, что температура газа на поверхности цилиндра также сохраняется постоянной $T = T_*$.

Предполагается, что в цилиндрической системе координат (z, r, θ) нестационарное течение зависит только от координаты r и имеет ламинарный характер. Таким образом, пренебрегается возможной неустойчивостью течения. Уравнения и краевые условия, определяющие состояние газа, имеют вид [105]

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + v \Gamma' \right) &= \mu \left(\Gamma'' - \frac{\Gamma'}{r} \right) + \mu' \left(\Gamma' - \frac{2\Gamma}{r} \right), \\ \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v T' \right) &= \frac{\partial p}{\partial t} + vp' + \frac{c_p}{\text{Pr}} \left[\mu \left(T'' + \frac{T'}{r} \right) + \mu' T' \right] + \\ &\quad + \mu \left[\frac{1}{r^2} \left(\Gamma' - \frac{2\Gamma}{r} \right)^2 + \frac{4}{3} \left(v'^2 - \frac{vv'}{r} + \frac{v^2}{r^2} \right) \right], \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + vv' - \frac{\Gamma^2}{r^3} \right) &= -p' + \frac{4}{3} \mu \left(v'' + \frac{v'}{r} - \frac{v}{r^2} \right) + \frac{2}{3} \mu' \left(2v' - \frac{v}{r} \right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{(r\rho v)'}{r} &= 0, \\ p &= R\rho T. \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma = 0, T = T_\infty, \rho = \rho_\infty, v = 0 & \quad \text{при } t = 0, r > r_*, \\
\Gamma = \Gamma_* = w_* r_*, T = T_*, v = 0 & \quad \text{при } t > 0, r = r_*, \\
\Gamma \rightarrow 0, T \rightarrow T_\infty, \rho \rightarrow \rho_\infty, v \rightarrow 0, \mu \rightarrow \mu_\infty & \quad \text{при } t > 0, r \rightarrow \infty,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где $2\pi\Gamma = rw$ – циркуляция азимутальной составляющей скорости (в данной главе определение Γ отличается на коэффициент 2π от определений из других глав), v – радиальная составляющая скорости, p – давление газа, $\text{Pr} = \mu c_p / \lambda = O(1)$ – число Прандтля, c_p – удельная теплоёмкость при постоянном давлении, R – удельная газовая постоянная, $(\cdot)' \equiv \partial/\partial r$. Число Прандтля Pr и c_p полагаются постоянными.

Согласно (2.1) радиальный масштаб области, в которой возникают вязкие возмущения, пропорционален $\sqrt{\nu_\infty t}$, где $\nu_\infty = \mu_\infty / \rho_\infty$. Безразмерный параметр $\sqrt{\nu_\infty t}/r_*$, являющийся отношением независимых линейных размеров, присущих рассматриваемой задаче, может меняться при $t > 0$ в широких пределах. В настоящей работе ставится задача о построении асимптотического решения уравнений (2.1) и (2.2) при относительно больших временах, когда $\sqrt{\nu_\infty t}/r_* = \varepsilon_0^{-1} \gg 1$. Для определенности рассматривается случай линейной зависимости коэффициента вязкости от температуры газа $\mu(T)/\mu_\infty = T/T_\infty$.

Для решения задачи область течения разбивается на три асимптотические подобласти. Линейные размеры r_* и $\sqrt{\nu_\infty t}$ соответствуют внутренней и внешней областям вязких возмущений (соответственно области G_1 и G_2). Как будет показано ниже, внешнему пределу решения в области G_2 соответствуют нулевая азимутальная скорость и конечный (но малый при больших числах Рейнольдса) расход, вызванный переменной по времени радиальной скоростью. Поскольку при ограниченной скорости распространения возмущений в газе расход должен обращаться в нуль на больших расстояниях от цилиндра, возникает третья асимптотическая область G_3 , за размер которой отвечают акустические возмущения. Линейный размер области G_3 равен $c_\infty t$, где c_∞ – скорость звука в невозмущенном газе, и является наибольшим из трёх масштабов: его отношение к размеру области G_2 составляет $c_\infty t / \sqrt{\nu_\infty t} = \text{Re}/(M_* \varepsilon_0) \gg 1$, где $\text{Re} = w_* r_* / \nu_\infty \gg 1$, $M_* = w_*/c_\infty$, $c_\infty = \sqrt{(\kappa - 1)c_p T_\infty}$, κ – показатель адиабаты.

Цель данной главы – определить характеристики течения в областях G_1 и G_2 . В каждой из этих областей вместо независимых переменных r, t введем

новые независимые переменные: $\eta = r/r_*$, ε_0 в области G_1 и $\tau = r/\sqrt{\nu_\infty t}$, ε_0 в области G_2 .

Зависимые переменные в уравнениях (2.1) и (2.2) представим в безразмерном виде

$$F = \frac{T^2}{T_\infty^2}, \quad \gamma = \frac{\Gamma}{\Gamma_*}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_\infty}, \quad \bar{v} = \frac{t}{r}v, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_\infty}.$$

Далее черточки над безразмерными переменными будут опущены. Уравнения (2.1) и (2.2) можно переписать в безразмерном виде. В области G_1 ($1 \leq \eta < \infty$)

$$\begin{aligned} \gamma'' - \frac{\gamma'}{\eta} + \frac{F'}{2F} \left(\gamma' - \frac{2\gamma}{\eta} \right) &= \varepsilon_0^2 \frac{\rho}{\sqrt{F}} \left(-\frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial \varepsilon_0} + \eta v \gamma' \right), \\ F'' + \frac{F'}{\eta} + 2 \frac{(\kappa - 1) \Pr M_*^2}{\eta^2} \sqrt{F} \left(\gamma' - \frac{2\gamma}{\eta} \right)^2 &= \varepsilon_0^2 \Pr \left[\frac{\rho}{\sqrt{F}} \left(-\frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_0} + \eta v F' \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{(\kappa - 1)}{\kappa} \left(-\frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon_0} + \eta v p' \right) - \frac{8\kappa(\kappa - 1)}{3} \frac{M_*^2 \varepsilon_0^2}{\text{Re}^2} \sqrt{F} (\eta v' (v + \eta v') + v^2) \right], \\ \frac{1}{\rho} p' - \frac{\kappa M_*^2}{\eta^3} \gamma^2 &= \frac{\kappa}{\text{Re}^2} M_*^2 \varepsilon_0^2 \left\{ \frac{\sqrt{F}}{\rho} \left[\frac{4}{3} (\eta v'' + 3v') + \frac{F'}{3F} (2\eta v' + v) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_0^2 \eta \left[\frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial v}{\partial \varepsilon_0} + v - v(v + \eta v') \right] \right\}, \\ (\rho \eta^2 v)' &= \frac{\varepsilon_0}{2} \eta \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon_0}, \quad p = \rho \sqrt{F}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\gamma = 1, \quad F = F_* = \frac{T_*^2}{T_\infty^2}, \quad v = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 1. \tag{2.4}$$

В области G_2 ($0 < \tau < \infty$)

$$\begin{aligned} \gamma'' - \frac{\gamma'}{\tau} + \frac{F'}{2F} \left(\gamma' - \frac{2\gamma}{\tau} \right) + \frac{\rho}{\sqrt{F}} \left(\frac{1}{2} - v \right) \tau \gamma' = -\frac{\rho}{\sqrt{F}} \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial \varepsilon_0}, \\ F'' + \frac{F'}{\tau} + \frac{\rho \Pr}{\sqrt{F}} \left(\frac{1}{2} - v \right) \tau F' = -\Pr \left\{ \frac{\rho}{\sqrt{F}} \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_0} - \right. \\ - 2 \frac{(\kappa - 1)}{\kappa} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon_0} + \left(\frac{1}{2} - v \right) \tau p' \right) + 2 \frac{(\kappa - 1) \varepsilon_0^2 M_*^2}{\tau^2} \sqrt{F} \left(\gamma' - \frac{2\gamma}{\tau} \right)^2 + \\ \left. + \frac{8(\kappa - 1)}{3} \frac{M_*^2 \varepsilon_0^2}{\text{Re}^2} \sqrt{F} (\tau v' (v + \tau v') + v^2) \right\}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} p' = \kappa M_*^2 \varepsilon_0^2 \left\{ \frac{\gamma^2}{\tau^3} + \frac{1}{\text{Re}^2} \left[\tau \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial v}{\partial \varepsilon_0} + \tau v' \left(\frac{1}{2} - v \right) + v - v^2 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sqrt{F}}{\rho} \left(\frac{4}{3} (\tau v'' + 3v') + \frac{F'}{3F} (2\tau v' + v) \right) \right] \right\}, \\ (\rho \tau^2 v)' = \frac{\varepsilon_0}{2} \tau \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon_0} + \frac{\tau^2}{2} \rho', \quad p = \rho \sqrt{F}, \end{aligned}$$

$$\gamma \rightarrow 0, \quad F \rightarrow 1, \quad p \rightarrow 1, \quad v \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

Здесь

$$()' = \begin{cases} \partial / \partial \eta & \text{в } G_1, \\ \partial / \partial \tau & \text{в } G_2. \end{cases}$$

Из уравнений (2.3) — (2.6) следует, что при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ и $M_* \sim F_* = O(1)$ искомые функции в областях G_1 и G_2 являются величинами порядка $O(1)$ или меньше. Очевидно, что граничных условий (2.4) и (2.6) недостаточно для однозначного определения этих функций в каждой из областей G_1 , G_2 . Необходимо потребовать, чтобы выполнялось сращивание асимптотического решения в области G_1 при $\eta \rightarrow \infty$ с асимптотическим решением в области G_2 при $\tau \rightarrow 0$.

2.2 Асимптотическое решение во внешней области

Из третьего уравнения (2.5) следует, что с точностью до членов порядка $O(\varepsilon_0^2)$ статическое давление в области G_2 является при $\tau = O(1)$ постоянной величиной $p = 1$ и имеет координатную особенность $p \sim \varepsilon_0^2 / \tau^2$ при $\tau \rightarrow 0$. Из уравнений (2.5) можно получить, что с точностью до членов порядка $O(\varepsilon_0^2)$

плотность газа и радиальная составляющая скорости выражаются через функцию F :

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{F}}, \quad v = \frac{c(\varepsilon_0)}{\tau^2} + \frac{F'}{2\tau \text{Pr}}. \quad (2.7)$$

Зависимость $c(\varepsilon_0)$ пока оставим неизвестной. Эта величина должна определяться из условия $v(\tau, \varepsilon_0) \leq O(1)$ при $\tau \leq O(1)$, вытекающего из условий сращивания с решением в области G_1 .

В главном приближении функция $F(\tau, \varepsilon_0)$ удовлетворяет уравнению

$$F'' + \frac{1}{\tau} F' \left(1 + \frac{\tau^2 \left(\frac{1}{2} - v \right) \text{Pr}}{F} \right) + \frac{\varepsilon_0 \text{Pr}}{2F} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_0} = 0. \quad (2.8)$$

Асимптотическое поведение решения уравнения (2.8) при $\tau \rightarrow 0$ имеет вид

$$F \sim \alpha_0 + \alpha \ln \tau. \quad (2.9)$$

Из условия, что при $\tau \rightarrow 0$ функция $F(\tau, \varepsilon_0)$ должна сращиваться с решением в области G_1 , а ее величина сохранять порядок $O(1)$ при $\tau = O(\varepsilon_0)$, следует

$$\alpha_0(M_*, F_*, \text{Pr}) = O(1), \quad \alpha = \frac{\alpha_1(M_*, F_*, \text{Pr})}{\ln \varepsilon_0}, \quad \alpha_1 = O(1). \quad (2.10)$$

С учетом соотношений (2.9) и (2.10) функции $F(\tau, \varepsilon_0)$, $\gamma(\tau, \varepsilon_0)$ представим в виде степенного ряда по малому параметру $1/\ln \varepsilon_0$:

$$\begin{aligned} F(\tau, \varepsilon_0) &= F_0(\tau) + \frac{\alpha_1}{\ln \varepsilon_0} F_1(\tau) + \frac{1}{\ln^2 \varepsilon_0} F_2(\tau) + O\left(\frac{1}{\ln^3 \varepsilon_0}\right), \\ \gamma(\tau, \varepsilon_0) &= \gamma_0(\tau) + \frac{1}{\ln \varepsilon_0} \gamma_1(\tau) + O\left(\frac{1}{\ln^2 \varepsilon_0}\right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Таким образом, в главном приближении решение для температуры и циркуляции зависит только от автомодельной переменной τ . Функция F_0 удовлетворяет нелинейному уравнению

$$F_0'' + \frac{1}{\tau} F_0' \left(1 + \frac{\tau^2 \left(\frac{1}{2} - v \right) \text{Pr}}{F_0} \right) = 0 \quad (2.12)$$

и краевым условиям

$$F_0(0) = \alpha_0, \quad F_0'(0) = 0, \quad F_0(\infty) = 1. \quad (2.13)$$

Единственным решением для $F_0(\tau)$, удовлетворяющим (2.12) и (2.13), является

$$F_0(\tau) = \alpha_0 = 1. \quad (2.14)$$

Согласно выражениям (2.7),

$$\rho(\tau, \varepsilon_0) = 1 - \frac{\alpha_1}{2 \ln \varepsilon_0} F_1(\tau) + O\left(\frac{1}{\ln^2 \varepsilon_0}\right), \quad v(\tau, \varepsilon_0) = \frac{1}{\ln \varepsilon_0} v_1(\tau) + O\left(\frac{1}{\ln^2 \varepsilon_0}\right).$$

Функции F_1, γ_0 удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} F_1'' + \frac{F_1'}{\tau} \left(1 + \frac{\text{Pr}}{2} \tau^2\right) &= 0, \\ \gamma_0'' - \frac{\gamma_0'}{\tau} \left(1 - \frac{\tau^2}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

и граничным условиям

$$F_1(\infty) = 0, \quad \gamma_0(\infty) = 0. \quad (2.16)$$

Решение уравнений (2.15), удовлетворяющих условиям (2.9) — (2.11) и (2.16):

$$F_1 = \int_{\infty}^{\xi} \frac{e^{-\xi^2/4}}{\xi} d\xi, \quad \gamma_0 = a_0 e^{-\tau^2/4}. \quad (2.17)$$

где $\xi = \tau \sqrt{\text{Pr}}$. В главном приближении распределение циркуляции отличается от случая несжимаемой жидкости на постоянный множитель $a_0(M_*, F_*, \text{Pr})$ — неизвестную константу, которая определяется из условия асимптотического сращивания решения (2.17) с решением в области G_1 .

Из представлений (2.17) и условия $v \leq O(1)$ при $\tau = O(\varepsilon_0)$ (область перекрытия с решением в G_1)

$$v_1(\tau) = -\frac{\alpha_1}{2 \text{Pr} \tau^2} (1 - \tau F_1').$$

Для следующего приближения функций, определяющих температуру и циркуляцию, имеем

$$\begin{aligned} F_2'' + \frac{F_2'}{\tau} \left(1 + \frac{\text{Pr}}{2} \tau^2\right) &= \frac{\alpha_1 \text{Pr}}{2} [F_1 + \tau F_1' (\alpha_1 F_1 + 2v_1)], \\ \gamma_1'' - \frac{\gamma_1'}{\tau} \left(1 - \frac{\tau^2}{2}\right) &= -\frac{\alpha_1 F_1'}{2} \left(\gamma_0' - \frac{2\gamma_0}{\tau}\right) + \frac{\tau \gamma_0'}{2} (\alpha_1 F_1 + 2v_1). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Границные условия для уравнений (2.18)

$$F_2(\infty) = 0, \quad \gamma_1(\infty) = 0. \quad (2.19)$$

В решение уравнений (2.18) с граничными условиями (2.19) войдут еще две пока неизвестные константы C_1 и C_2 .

$$\begin{aligned} F_2 &= \alpha_1 \left[F_1 \ln \xi - 2 \int_{\infty}^{\xi} \frac{e^{-\xi^2/4}}{\xi} \ln \xi d\xi + \frac{\alpha_1}{4} \left(4 \int_{\infty}^{\xi} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\xi} d\xi - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \int_{\infty}^{\xi} \xi e^{-\xi^2/4} \ln^2 \xi d\xi - e^{-\xi^2/4} \ln^2 \xi - 2F_1 e^{-\xi^2/4} + F_1^2 \right) \right] + C_2 F_1, \\ \gamma_1 &= \frac{\alpha_1 a_0}{2} \left\{ \left(1 + \Pr + \frac{1}{\Pr} + \frac{\tau^2}{2} \right) e^{-\tau^2/4} \int_{\infty}^{\tau} \frac{e^{-\tau^2 \Pr/4}}{\tau} d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \left(2 + \Pr + \frac{1}{\Pr} \right) \int_{\infty}^{\tau} \frac{e^{-\tau^2(1+\Pr)/4}}{\tau} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Pr} \left[\int_{\infty}^{\tau} \frac{e^{-\tau^2/4}}{\tau} d\tau + e^{-\tau^2/4} \left(e^{-\tau^2 \Pr/4} - \ln \tau \right) \right] \right\} + C_1 \gamma_0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

В двух первых приближениях при $\tau \rightarrow \infty$ функции F, γ, ρ отличаются от своих предельных значений (2.6) на экспоненциально малые величины. Безразмерная радиальная составляющая скорости $v \rightarrow 0$ по степенному закону $v \sim \alpha_1 / (\tau^2 \ln \varepsilon_0)$. Такое поведение $v(\tau)$ соответствует тому, что расширение области G_2 с течением времени индуцирует при $\tau \rightarrow \infty$ поле радиальных скоростей, эквивалентных источнику (или стоку) с интенсивностью, рейнольдсовски малой по сравнению с характерной циркуляцией вихря Γ_* и зависящей от времени

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} 2\pi r \frac{r}{t} v = - \frac{\pi \alpha_1 v_\infty}{\Pr \ln \varepsilon_0}. \quad (2.21)$$

В области G_3 возникает задача о распространении возмущений от источника, который «включается» в момент времени $t = 0$ и на больших временах имеет вид (2.21). Так как со временем $\varepsilon_0(t)$ уменьшается, то интенсивность источника убывает. Из асимптотики (2.21) и уравнений (2.1) следует, что радиальная скорость v и возмущения температуры $\tilde{T} = T - 1$, плотности $\tilde{\rho} = \rho - 1$

и давления $\tilde{p} = p - 1$ имеют порядок $O(M_*^2 \varepsilon_0^2 / \text{Re}^2 \ln \varepsilon_0)$ и удовлетворяют линейным уравнениям Эйлера, которые преобразуются к виду

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right) - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \right) - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{\kappa} \tilde{p}, \quad \tilde{T} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \tilde{p}.$$

При $r \geq c_\infty t$ характеристики течения соответствуют невозмущённому состоянию газа. В отличие от главного приближения уравнений в областях G_1 (2.11) и G_2 (2.35), уравнения в области G_3 не сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям и решение не является автомодельным.

Из представлений (2.11), (2.14) и (2.17) следует, что на масштабе $\tau = O(\varepsilon_0)$, т. е. в области G_1 , первые два приближения становятся членами одного порядка малости. Для проведения процедуры сращивания решения в области G_2 с решением в области G_1 выпишем поведение функций F, γ при $\tau \rightarrow 0$ (внутренний предел внешнего разложения):

$$F = 1 + \frac{\alpha_1}{\ln \varepsilon_0} \left(\ln \tau + C_F + \frac{1}{2} \ln \text{Pr} \right) +$$

$$+ \frac{\alpha_1}{\ln^2 \varepsilon_0} \left\{ \left[\frac{C_2}{\alpha_1} + C_F + \frac{\alpha_1}{2} (1 + C_F) \right] \ln \tau + O(1) \right\} + O\left(\frac{1}{\ln^3 \varepsilon_0}\right),$$

$$\gamma = a_0 \left\{ 1 + \frac{\alpha_1}{2 \ln \varepsilon_0} \left[-\ln \tau + \frac{2C_1}{\alpha_1} + \frac{1 - \text{Pr}}{\text{Pr}} C_F + \frac{1}{2} \left(1 + \text{Pr} + \frac{1}{\text{Pr}} \right) \ln \frac{\text{Pr}}{1 + \text{Pr}} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{2} \ln (1 + \text{Pr}) + \frac{1}{\text{Pr}} \right] \right\} + O\left(\frac{1}{\ln^2 \varepsilon_0}\right), \quad (2.22)$$

где $C_F = -\ln 2 + C/2$, $C = 0.5772$ – постоянная Эйлера.

Первое из соотношений (2.22), переписанное в переменных η с помощью подстановки $\tau = \varepsilon_0 \eta$, определяет граничные условия для функции F в области G_1 при $\eta \rightarrow \infty$ (внешний предел внутреннего разложения). С точностью до членов порядка $O(1/\ln \varepsilon_0)$

$$F = 1 + \alpha_1 + \frac{\alpha_1}{\ln \varepsilon_0} \left(\ln \eta + 2C_F + \frac{1}{2} \ln \text{Pr} + \frac{\alpha_1}{2} (1 + C_F) + \frac{C_2}{\alpha_1} \right) + O\left(\frac{1}{\ln^2 \varepsilon_0}\right). \quad (2.23)$$

Из-за логарифмического характера особенности в решении задачи при $\tau \rightarrow 0$ (2.22) возникает ситуация, когда для сращивания решений в переменных области G_1 (2.23) с точностью до членов $O(1/\ln^n \varepsilon_0)$ необходимо в области G_2 построить решение (2.11), (2.14), (2.17) и (2.20) с точностью до $O(1/\ln^{n+1} \varepsilon_0)$.

2.3 Асимптотическое решение во внутренней области

Решение уравнений (2.3) будем искать, пренебрегая в них членами порядка $O(\varepsilon_0^2)$. Тогда для функций F и γ имеем

$$\begin{aligned} F'' + \frac{F'}{\eta} + 2\frac{(\kappa - 1)\Pr M_*^2}{\eta^2}\sqrt{F}\left(\gamma' - \frac{2\gamma}{\eta}\right)^2 &= 0, \\ \gamma'' - \frac{\gamma'}{\eta} + \frac{F'}{2F}\left(\gamma' - \frac{2\gamma}{\eta}\right) &= 0, \\ \gamma = 1, \quad F = F_* &\quad \text{при} \quad \eta = 1. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Легко проверить, что циркуляция $\gamma(\eta)$, не имеющая особенность при $\eta \rightarrow \infty$ и удовлетворяющая условию $\gamma(1) = 1$, выражается через функцию $F(\eta)$:

$$\gamma(\eta) = b\eta^2 \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^3\sqrt{F}}, \quad b = \left(\int_1^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^3\sqrt{F}} \right)^{-1}. \tag{2.25}$$

Подстановка (2.25) во второе уравнение (2.24) приводит к тождеству. С учетом (2.24) из уравнений (2.3) следует, что $p(\eta)$ и $\rho(\eta)$ также выражаются через интегралы функции $F(\eta)$. Сосредоточимся на решении первого уравнения (2.24), так как при наличии решения для F имеется решение для остальных гидродинамических функций. Подставляя (2.25) в первое уравнение (2.24) и учитывая граничное условие и условие сращивания решений, имеем

$$F'' + \frac{F'}{\eta} + 2\frac{(\kappa - 1)b^2\Pr M_*^2}{\eta^4\sqrt{F}} = 0, \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} F(1) = F_*, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} F(\eta) &= 1 + \alpha_1 + \\ &+ \frac{\alpha_1}{\ln \varepsilon_0} \left(\ln \eta + 2C_F + \frac{1}{2} \ln \Pr + \frac{\alpha_1}{2} (1 + C_F) + \frac{C_2}{\alpha_1} \right) + O\left(\frac{1}{\ln^2 \varepsilon_0}\right). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Введем преобразование функции $F(\eta)$

$$F(\eta) = [2(\kappa - 1)b^2\Pr M_*^2]^{2/3}\Phi(\eta) = F_* \frac{\Phi(\eta)}{\Phi(1)}. \tag{2.28}$$

Выпишем уравнения и краевые условия, которым с точностью до $O(1/\ln^2 \varepsilon_0)$ удовлетворяет функция $\Phi(\eta)$. Из (2.26) и (2.28)

$$\Phi'' + \frac{\Phi'}{\eta} + \frac{1}{\eta^4\sqrt{\Phi}} = 0. \tag{2.29}$$

Используя определение величины b и (2.28), получаем

$$\Phi(1) = \lambda_0 \left(\int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta^3 \sqrt{\Phi}} \right)^4, \quad (2.30)$$

где $\lambda_0 = F_*/[2(\kappa - 1)\Pr M_*^2]^2 = 1/[2(\kappa - 1)\Pr \widetilde{M}_*^2]^2$, $\widetilde{M}_* = w_*/a_*$, a_* — скорость звука в газе у поверхности цилиндра. Из (2.27)

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Phi(\eta) = \frac{\Phi(1)}{F_*} \left[1 + \alpha_1 + \frac{\alpha_1}{\ln \varepsilon_0} \left(\ln \eta + 2C_F + \frac{1}{2} \ln \Pr + \frac{\alpha_1}{2} (1 + C_F) + \frac{C_2}{\alpha_1} \right) \right]. \quad (2.31)$$

Уравнение (2.29) можно переписать в виде

$$(\Phi' \eta)' + \frac{1}{\eta^3 \sqrt{\Phi}} = 0. \quad (2.32)$$

Откуда

$$\int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta^3 \sqrt{\Phi}} = \Phi'(1) - \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta \Phi'(\eta).$$

Следовательно, для задачи (2.29) — (2.31) вместо соотношения (2.30) можно использовать граничное условие

$$\Phi(1) = \lambda_0 \left(\Phi'(1) - \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta \Phi'(\eta) \right)^4. \quad (2.33)$$

Асимптотическое поведение решения уравнения (2.29) при $\eta \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\Phi(\eta) \sim B_0 + B_1 \ln \eta. \quad (2.34)$$

Решение уравнений (2.29), (2.31) и (2.33) будем искать в виде асимптотического ряда

$$\Phi(\eta) = \Phi_0(\eta) + \frac{1}{\ln \varepsilon_0} \Phi_1(\eta) + O\left(\frac{1}{\ln^2 \varepsilon_0}\right). \quad (2.35)$$

Из (2.31), (2.34) и (2.35) следует, что $\Phi_0(\eta)$ не содержит логарифмического члена при $\eta \rightarrow \infty$. Уравнение и граничные условия для функции $\Phi_0(\eta)$ имеют вид

$$\Phi_0'' + \frac{\Phi_0'}{\eta} + \frac{1}{\eta^4 \sqrt{\Phi_0}} = 0, \quad (2.36)$$

$$\Phi_0(1) = \lambda_0 (\Phi_0'(1))^4, \quad (2.37)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta \Phi'_0 = 0. \quad (2.38)$$

При заданных параметрах течения около цилиндра параметр λ_0 фиксирован. Тогда если в дополнение к (2.37) и (2.38) задавать произвольное значение $\Phi'_0(1)$, то система (2.36) — (2.38) будет переопределенной. Варьируя $\Phi'_0(1)$ и решая задачу Коши, можно найти такое его значение, при котором система (2.36) — (2.38) является разрешимой. В качестве примеров на рисунке 19 приведены решения (снизу вверх) при $\lambda_0 = 0.01$ и $\Phi'_0(1) = 1.1731$, $\lambda_0 = 0.1$ и $\Phi'_0(1) = 0.9754$, $\lambda_0 = 1$ и $\Phi'_0(1) = 0.7396$, $\lambda_0 = 10$ и $\Phi'_0(1) = 0.5275$. Из (2.27) и (2.28) следует, что параметр α_1 определяется главным приближением решения в области G_1

$$1 + \alpha_1(F_*, \lambda_0) = F_* \frac{\Phi_0(\infty)}{\Phi_0(1)}. \quad (2.39)$$

При $F_* = O(1)$ и $\lambda_0 = O(1)$ параметр α_1 есть также величина порядка $O(1)$ и может принимать положительные и отрицательные значения. Взаимодействие температурного и вихревого полей в области G_1 приводит к переходу энергии вращательного движения газа в энергию тепловую. Относительная температура газа $T(\eta)/T_*$ вблизи поверхности цилиндра возрастает. Зависимость $F_* = \tilde{F}_*(\lambda_0)$, представленная на рисунке 20, соответствует $\alpha_1(F_*, \lambda_0) = 0$. Если $F_* > \tilde{F}_*(\lambda_0)$, то поток тепла поступает из области G_1 в область G_2 ; в противном случае поток тепла меняет свое направление. Согласно граничному условию (2.31) функция $\Phi_1(\eta)$ должна иметь логарифмическую особенность при $\eta \rightarrow \infty$. Из-за этой особенности оба слагаемых в (2.35) становятся однопорядковыми при переходе из области G_1 в область G_2 . Сращивание решений становится возможным, если в (2.35) учитываются оба члена асимптотического разложения. Уравнения и краевые условия для функции $\Phi_1(\eta)$:

$$\Phi''_1 + \frac{\Phi'_1}{\eta} - \frac{\Phi_1}{2\eta^4 \Phi_0^{3/2}} = 0, \quad (2.40)$$

$$\Phi_1(1) = 4 \frac{\Phi_0(1)}{\Phi'_0(1)} \left(\Phi'_1(1) - \frac{\alpha_1 \Phi_0(1)}{F_*} \right), \quad (2.41)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta \Phi'_1 = \frac{\alpha_1 \Phi_0(1)}{F_*}. \quad (2.42)$$

При произвольном значении $\Phi'_1(1)$ система (2.40) — (2.42) также является переопределенной. Варьируя $\Phi'_1(1)$, можно найти его значение, при котором выполняется условие (2.42).

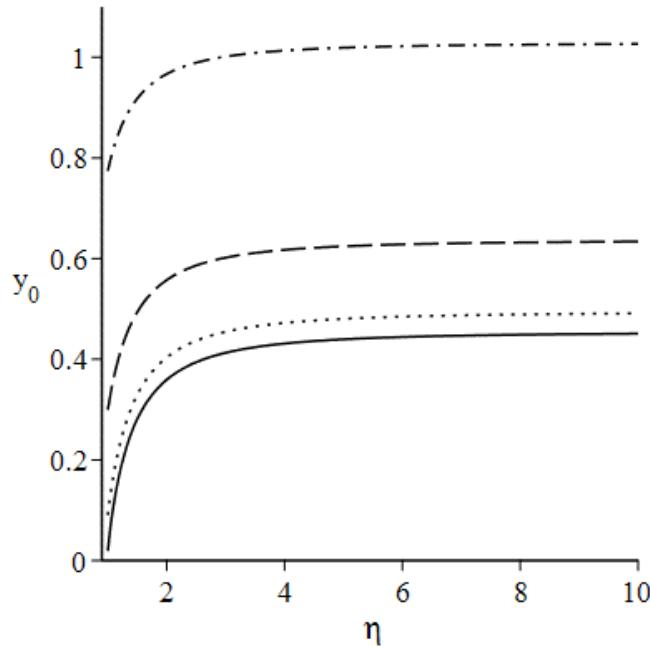


Рисунок 19 — Решение задачи (2.36) — (2.38) при (снизу вверх) $\lambda_0 = 0.01$ и $\Phi'_0(1) = 1.1731$, $\lambda_0 = 0.1$ и $\Phi'_0(1) = 0.9754$, $\lambda_0 = 1$ и $\Phi'_0(1) = 0.7396$, $\lambda_0 = 10$ и $\Phi'_0(1) = 0.5275$

С точностью до членов порядка $O(1/\ln^2 \varepsilon_0)$ решение для $F(\eta, \lambda_0)$ в области G_1 можно считать известным. При $\eta \rightarrow \infty$ это решение имеет вид

$$F(\eta) = 1 + \alpha_1(F_*, \lambda_0) + \frac{1}{\ln \varepsilon_0} (\alpha_1(F_*, \lambda_0) \ln \eta + h(F_*, \lambda_0)), \quad (2.43)$$

где

$$h = (1 + \alpha_1) \left[\frac{\lim_{\eta \rightarrow \infty} \left(\Phi_1(\eta) - \frac{\alpha_1 \Phi_0(1)}{F_*} \ln \eta \right)}{\Phi_0(\infty)} - \frac{\Phi_1(1)}{\Phi_0(1)} \right]. \quad (2.44)$$

Из (2.27), (2.43) и (2.44) находится неизвестный коэффициент C_2 в асимптотическом представлении для функции F в области G_2 . Через известные функции $\Phi_0(\eta)$ и $\Phi_1(\eta)$ можно из (2.25) и (2.32) выразить с точностью до членов $O(1/\ln^2 \varepsilon_0)$ решение для циркуляции

$$\gamma(\eta) = \frac{\eta^2 \left(\eta \Phi'(\eta) - \frac{1}{\ln \varepsilon_0} \frac{\alpha_1 \Phi_0(1)}{F_*} \right)}{\Phi'(1) - \frac{1}{\ln \varepsilon_0} \frac{\alpha_1 \Phi_0(1)}{F_*}}. \quad (2.45)$$

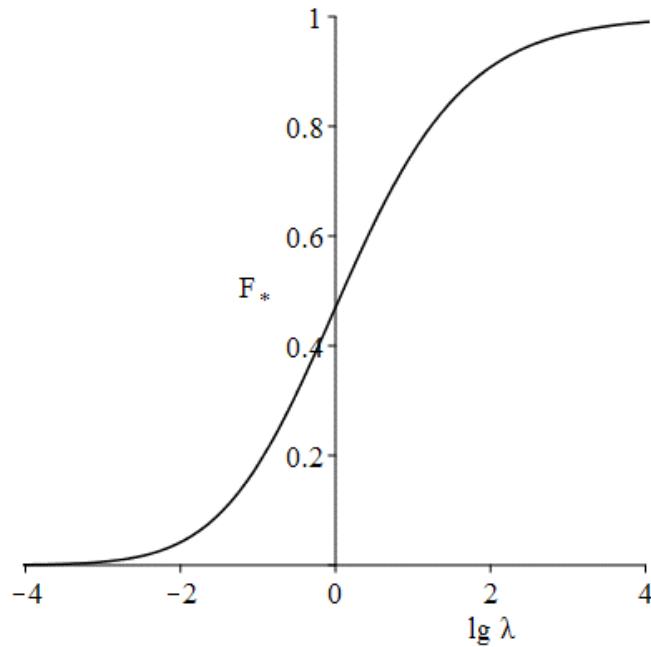


Рисунок 20 — Зависимость $F_*(\lambda_0)$, соответствующая условию $\alpha_1(F_*, \lambda_0) = 0$ отсутствия потока тепла из области G_1 в область G_2

Интегрируя два раза выражение (2.25) по частям, с учетом (2.43) получаем при $\eta \rightarrow \infty$

$$\gamma(\eta) = \frac{b}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{F}} - \frac{1}{\ln \varepsilon_0} \frac{\alpha_1}{4F^{3/2}} + O\left(\frac{1}{\ln^2 \varepsilon_0}\right) \right\}. \quad (2.46)$$

Откуда внешний предел внутреннего разложения представляется формулой

$$\gamma(\eta) = \frac{(\kappa - 1) \Pr M_*^2}{(\Phi'_0(1))^3} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left[k_\eta^{-1/2} - \frac{1}{\ln \varepsilon_0} \left(\frac{\alpha_1}{4} k_\eta^{-3/2} + \frac{3 \Phi_1(1)}{4 \Phi_0(1)} k_\eta^{-1/2} \right) \right], \quad (2.47)$$

где $k_\eta = 1 + \alpha_1 + (\alpha_1 \ln \eta + h) / \ln \varepsilon_0$. Соотношение (2.47), переписанное в переменных τ , определяет вид внутреннего предела внешнего разложения для функции γ в области G_2

$$\gamma(\eta) = \frac{(\kappa - 1) \Pr M_*^2}{(\Phi'_0(1))^3} \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[k_\tau^{-1/2} - \frac{1}{\ln \varepsilon_0} \left(\frac{\alpha_1}{4} k_\tau^{-3/2} + \frac{3 \Phi_1(1)}{4 \Phi_0(1)} k_\tau^{-1/2} \right) \right], \quad (2.48)$$

где $k_\tau = 1 + (\alpha_1 \ln \tau + h) / \ln \varepsilon_0$. Раскладывая (3.25) в ряд по степеням $1/\ln \varepsilon_0$, получим

$$\gamma(\eta) = \frac{(\kappa - 1) \Pr M_*^2}{(\Phi'_0(1))^3} \left[1 - \frac{1}{\ln \varepsilon_0} \left(\frac{\alpha_1}{2} \ln \tau + \frac{2h + \alpha_1}{4} + \frac{3 \Phi_1(1)}{4 \Phi_0(1)} \right) + O\left(\frac{1}{\ln^2 \varepsilon_0}\right) \right]. \quad (2.49)$$

Сравнение (2.49) с (2.22) позволяет определить неизвестные константы a_0 и C_1 , входящие в представление величин в области G_2 . Для константы a_0 получаем соотношение

$$a_0 = \frac{(\kappa - 1) \Pr M_*^2}{(\Phi'_0(1))^3}. \quad (2.50)$$

Выражение (2.50) можно переписать в виде

$$a_0 = \left(2 \sqrt{\frac{\Phi_0(1)}{F_*}} \int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta^3 \sqrt{\Phi_0(\eta)}} \right)^{-1}. \quad (2.51)$$

Из (2.36) — (2.38) следует, что $\Phi'_0(\eta) > 0$. Заменяя в подынтегральном выражении (2.51) $\Phi_0(\eta)$ на меньшую величину $\Phi_0(1)$, приходим к неравенству

$$a_0 > \left(\frac{2}{\sqrt{F_*}} \int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta^3} \right)^{-1}. \quad (2.52)$$

В случае $F_* \geq 1$ температура газа во всём пространстве будет превосходить температуру невозмущённого газа ($F \geq 1$), поскольку нет причин, противодействующих нагреву газа вследствие перехода энергии вращательного движения в тепло. В этом случае из (2.52) следует, что $a_0 > 1$. Можно показать, что тот же результат будет иметь место при произвольной монотонно возрастающей зависимости $\mu(T)$. Это позволяет сформулировать теорему о скачке циркуляции: если $F_* \geq 1$ и $d\mu/dT > 0$, то циркуляция в сжимаемом газе в области $r \sim \sqrt{\nu_\infty t}$ будет превышать циркуляцию в несжимаемой жидкости при тех же r и t (сравнение приведено на рисунке 23). Название теоремы связано с тем, что внутренний предел внешнего решения (при $\tau \rightarrow 0$) для циркуляции $\gamma_0(\tau)$ не совпадает со значением циркуляции на поверхности цилиндра.

Пользуясь промежуточными асимптотиками температуры (2.23) и циркуляции (2.46), можно в основном приближении вычислить кинетическую энергию течения

$$E = \pi \int_0^\infty \frac{\rho \Gamma^2}{r} dr \approx \pi \rho_\infty \Gamma_*^2 a_0^2 \int_1^{\varepsilon_0^{-1}} \frac{d \ln \eta}{\left(1 + \alpha_1 + \alpha_1 \frac{\ln \eta}{\ln \varepsilon_0} \right)^{3/2}} = \frac{2 a_0^2}{\alpha_1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_1}} \right) E_0, \quad (2.53)$$

где $E_0 = \pi \rho_\infty \Gamma_*^2 |\ln \varepsilon_0|$ — кинетическая энергия для случая несжимаемой жидкости в тот же момент времени. Почти вся энергия приходится на течение в

промежуточной области $r_* \ll r \ll \sqrt{\nu_\infty t}$ и со временем неограниченно рас-тёт вместе с размером этой области. В случае $M_* = F_* = \text{Pr} = 1$, численное решение даёт значения констант $a_0 \approx 1.19$, $\alpha_1 \approx 0.88$. Кинетическая энергия течения сжимаемого газа оказывается меньше, чем у несжимаемой жидкости: в пределе $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ из (2.53) получается $E/E_0 \approx 0.87$.

2.4 Составное решение

С точностью до членов $O(1/\ln^2 \varepsilon_0)$ равномерно пригодное решение для функций F и γ в области $G_1 \cap G_2$ представляется в виде [106]

$$\hat{F}(\tau) = \frac{F^{(1)}(\tau) F^{(2)}(\tau)}{F^{(c)}(\tau)}, \quad \hat{\gamma}(\tau) = \frac{\gamma^{(1)}(\tau) \gamma^{(2)}(\tau)}{\gamma^{(c)}(\tau)},$$

где $F^{(1)}(\tau)$ и $\gamma^{(1)}(\tau)$ – решения (2.28), (2.35) и (2.45) в области G_1 , переписанные в переменных τ , $F^{(2)}(\tau)$ и $\gamma^{(2)}(\tau)$ – решения (2.11) в области G_2 , $F^{(c)}(\tau)$ и $\gamma^{(c)}(\tau)$ – внутренний предел внешнего разложения (2.22).

На рисунках 21, 22 представлено поведение $\hat{T}(\tau) = \sqrt{\hat{F}(\tau)}$ и $\hat{\gamma}(\tau)$, соответствующих случаю $M_* = \text{Pr} = 1$, $1/\ln \varepsilon_0 = -0.189$ и трём разным значениям F_* : 1) $F_* = 1$, $\alpha_1 > 0$ (чёрные сплошные кривые); 2) $F_* = 0.407$, $\alpha_1 = 0$ (серые кривые); 3) $F_* = 0.2$, $\alpha_1 < 0$ (светло-серые); пунктирами изображено численное решение уравнений Навье–Стокса при $F_* = 1$ (см. раздел 2.6). В случае $\alpha_1 > 0$ температура имеет максимум в области G_1 ; при $\alpha_1 \leq 0$ – монотонно возрастает при удалении от поверхности цилиндра. Переход энергии вращательного движения в тепловую вызывает рост температуры газа в области G_1 , в области G_2 – влияние на изменение температуры газа в основном оказывает диффузия тепла. Рост температуры газа вызывает увеличение коэффициента динамической вязкости ($\mu \propto T$) и появление градиента вязкости ($\partial\mu/\partial r \propto \partial T/\partial r$), что в случае $\alpha_1 > 0$ приводит к немонотонному изменению циркуляции вращательного движения вдоль координаты r . По мере удаления от поверхности цилиндра завихренность

$$\Omega = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \gamma}{\partial \eta}$$

дважды меняет свой знак. Имеется участок, на котором генерируется положительная завихренность. В случае, соответствующем рисунку 21 при $F_* = 1$,

он включает $2.3\epsilon_0 < \tau < 0.36$. Из второго уравнения системы (3.1) можно получить соотношение

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = \frac{b}{2\eta^2 F^{3/2}} \frac{\partial F}{\partial \eta},$$

из которого следует, что экстремум завихренности в области G_1 достигается в той же точке ($\tau \approx 3.4\epsilon_0$, рисунок 21), что экстремум температуры. Циркуляция окружной скорости на участке $0.084 \div 0.099 < \tau < 0.72 \div 0.77$ превосходит циркуляцию около поверхности цилиндра. Этот эффект не наблюдается в несжимаемой жидкости, в которой изменение циркуляции вдоль координаты r — монотонное, а в пределах области G_1 циркуляция постоянна. На рисунке 23 приведено сравнение $\hat{\gamma}(\tau)$ для сжимаемого газа при $M_* = F_* = \text{Pr} = 1$, $1/\ln \epsilon_0 = -0.189$ (сплошная кривая) и $\gamma(\tau) = e^{-\tau^2/4}$ для несжимаемой жидкости (пунктир).

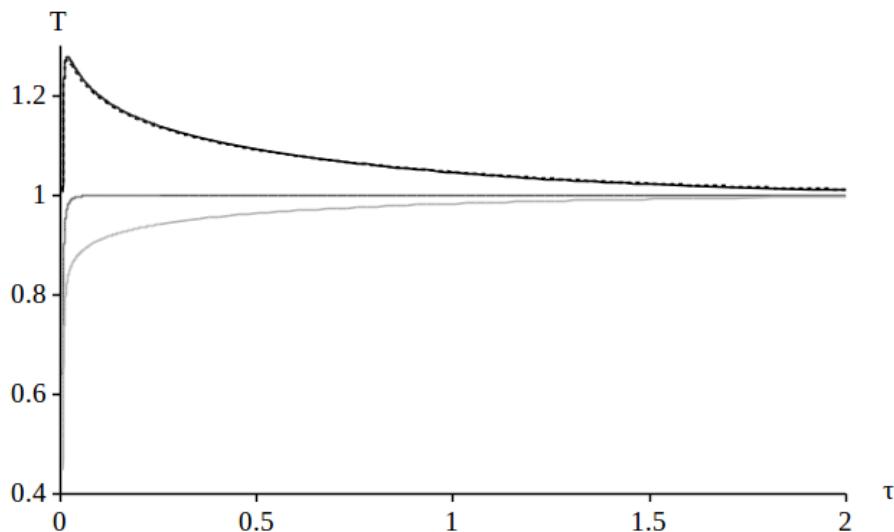


Рисунок 21 — Составное решение для температуры $T(\tau)$ при $M_* = \text{Pr} = 1$, $1/\ln \epsilon_0 = -0.189$ и трёх значениях F_* : 1) $F_* = 1$, $\alpha_1 > 0$ (чёрная сплошная кривая); 2) $F_* = 0.407$, $\alpha_1 = 0$ (серая); 3) $F_* = 0.2$, $\alpha_1 < 0$ (светло-серая); численное решение уравнений Навье–Стокса при $M_* = \text{Pr} = F_* = 1$, $1/\ln \epsilon_0 = -0.189$ (пунктир)

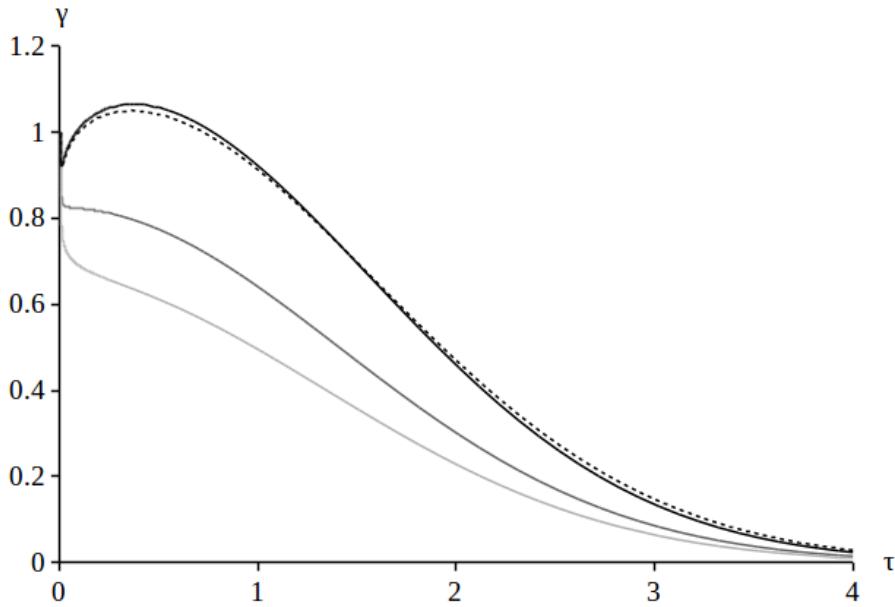


Рисунок 22 — Составное решение для циркуляции $\gamma(\tau)$ при $M_* = \text{Pr} = 1$, $1/\ln \varepsilon_0 = -0.189$ и трёх значениях F_* : 1) $F_* = 1$, $\alpha_1 > 0$ (чёрная сплошная кривая); 2) $F_* = 0.407$, $\alpha_1 = 0$ (серая); 3) $F_* = 0.2$, $\alpha_1 < 0$ (светло-серая); численное решение уравнений Навье–Стокса при $M_* = \text{Pr} = F_* = 1$, $1/\ln \varepsilon_0 = -0.189$ (пунктир)

2.5 Асимптотическое решение при малых числах Маха

При $\lambda_0 \rightarrow \infty$, что соответствует малым числам M_* , можно получить решение для F в аналитическом виде. Из соотношения (2.26) и граничного условия на поверхности цилиндра следует, что с точностью до $O(\lambda_0^{-1})$ в области G_1

$$F = F_* \left[1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \left(1 - \frac{1}{\eta^2} \right) + d \ln \eta \right]. \quad (2.54)$$

В области G_2 по-прежнему

$$F = 1 + \frac{\alpha_1}{\ln \varepsilon_0} \ln \tau. \quad (2.55)$$

Асимптотическое сращивание решений (2.54) и (2.55) определяет неизвестные константы α_1 и d

$$\alpha_1 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \right) F_* - 1, \quad d = \frac{\alpha_1}{F_* \ln \varepsilon_0}.$$

Аналогичным путем определяется распределение циркуляции. Из (2.50) следует, что в главном приближении $a_0 = \sqrt{F_*}$.

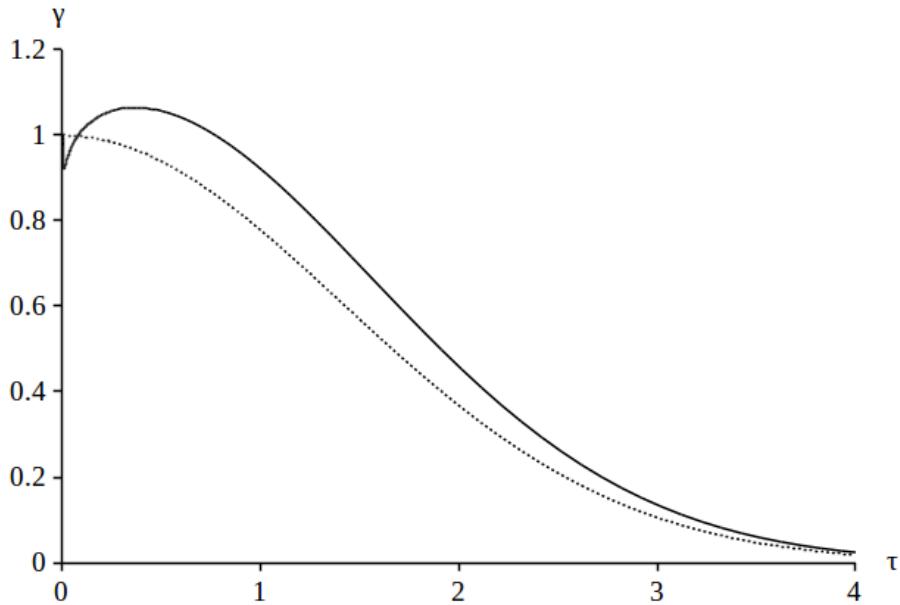


Рисунок 23 — Решение для циркуляции $\gamma(\tau)$ в случае сжимаемого газа при $M_* = \text{Pr} = F_* = 1$, $1/\ln \varepsilon_0 = -0.189$ (сплошная кривая) и несжимаемой жидкости (пунктир)

2.6 Асимптотическое решение при больших числах Маха

В предыдущих пунктах асимптотическое решение задачи при числах $M_* = O(1)$ получено при условии, что $\varepsilon_0 \rightarrow 0$. В этом случае и величина $1/\ln \varepsilon_0 \rightarrow 0$. Вместе с тем, при реально достижимых больших временах (малых ε_0) величина $1/\ln \varepsilon_0$ может оказаться не столь уж малой. Так при $\varepsilon_0 = 10^{-4}$ получается $1/\ln \varepsilon_0 \approx -0.1$.

Анализ результатов при $M_* = O(1)$ указывает на то, что с ростом M_* величина коэффициента α_1 также растет. Поэтому при больших числах M_* может наступить ситуация, когда коэффициент $\alpha_1/\ln \varepsilon_0$ может перестать быть малой величиной. Определим условия, при котором $\alpha_1/\ln \varepsilon_0$ становится величиной порядка $O(1)$. Для этого рассмотрим решение при $\lambda_0 \ll 1$.

Функции $\Phi_0(1)$ и $\Phi'_0(1)$ связаны соотношением (2.37) и поэтому имеют разный порядок малости по параметру λ_0 . Для определения порядков этих функций проведем численное решение задачи (2.36) — (2.38) при малых λ_0 . На рисунке 24 показано решение этих уравнений при $\lambda_0 = 10^{-6}$ (сплошная кривая) и $\lambda_0 = 10^{-3}$ (пунктир). Видно, что зависимости $\Phi_0(\eta, \lambda_0)$ в этих случаях близки друг к другу. В пределе при $\lambda_0 \rightarrow 0$ обозначим значение $\Phi_0(\eta)$ через $\Phi_{00}(\eta)$. Из численного решения получаются величины, которые имеют порядок

$O(1)$: $\Phi'_{00}(1) = d_1 \approx 1.3641$, $\Phi_{00}(\infty) = d_2 \approx 0.4450$. Подставляя эти значения в формулу (2.39), получаем

$$\frac{\alpha_1}{\ln \varepsilon_0} \sim \frac{F_*}{\ln \varepsilon_0} \frac{\Phi_{00}(\infty)}{\Phi_{00}(1)} = \frac{F_* d_2}{d_1^4} \frac{1}{\lambda_0 \ln \varepsilon_0} = \frac{d_2}{d_1^4} \frac{[2(\kappa - 1) \Pr M_*^2]^2}{\ln \varepsilon_0} = O\left(\frac{M_*^4}{\ln \varepsilon_0}\right).$$

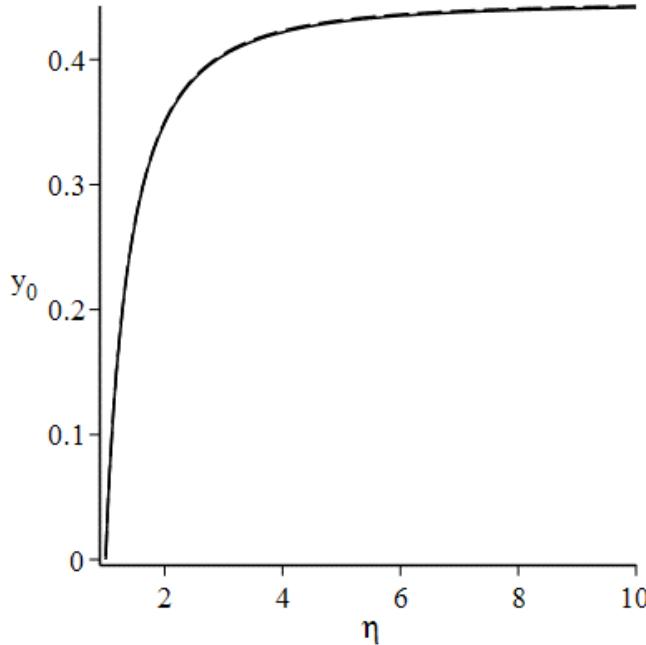


Рисунок 24 — Решение задачи (2.36) – (2.38) при $\lambda_0 = 10^{-6}$ (сплошная кривая) и $\lambda_0 = 10^{-3}$ (пунктир), $\Phi'_0(1) \approx 1.3641$

Таким образом, соотношения, полученные в разделах 2.1 и 2.3, справедливы при $M_*^4/\ln \varepsilon_0 \ll 1$. Построим решение при $M_*^4/\ln \varepsilon_0 = O(1)$.

Так же, как и в случае малых возмущений, в области G_2 с точностью до членов порядка $O(M_*^2 \varepsilon_0^2)$ статическое давление $p = 1$ при $\tau = O(1)$ и имеет координатную особенность $p \sim M_*^2 \varepsilon_0^2 / \tau^2$ при $\tau \rightarrow 0$. Плотность, радиальная компонента скорости и функция F подчиняются соотношениям (2.7) и (2.8). Асимптотическое поведение решения уравнения (2.8) при $\tau \rightarrow 0$ имеет вид

$$F \sim \alpha_0 + \frac{M_*^4}{\ln \varepsilon_0} \tilde{\alpha}_1 \ln \tau. \quad (2.56)$$

Здесь $\alpha_0 \geq O(1)$, $\tilde{\alpha}_1 = O(1)$. Так как функции F и v согласно (2.56) зависят от τ и $1/\ln \varepsilon_0$, уравнения для их определения в области G_2 в основном приближении будут иметь вид

$$F'' + \frac{1}{\tau} F' \left(1 + \frac{\tau^2 (\frac{1}{2} - v) \Pr}{F} \right) = 0, \quad v = -\frac{1}{2 \Pr \tau^2} \left(\frac{M_*^4 \tilde{\alpha}_1}{\ln \varepsilon_0} - \tau F' \right). \quad (2.57)$$

Неизвестные коэффициенты α_0 и $\tilde{\alpha}_1$ определяют решение краевой задачи для уравнений (2.57) и должны выбираться из условия $F = 1$ при $\tau \rightarrow \infty$ и из сращивания с решением в области G_1 .

Внешний предел внутреннего разложения для функции Φ в области G_1 определяется из соотношения (2.56). При $\eta \rightarrow \infty$

$$\Phi(\eta) \sim \frac{\Phi(1)}{F_*} \left(\alpha_0 + M_*^4 \tilde{\alpha}_1 + \frac{M_*^4}{\ln \varepsilon_0} \tilde{\alpha}_1 \ln \eta \right). \quad (2.58)$$

Формула (2.58) указывает на то, что функцию $\Phi(\eta)$ можно представить в виде асимптотического ряда

$$\Phi(\eta) = \Phi_0(\eta) + \frac{M_*^4}{\ln \varepsilon_0} \Phi_1(\eta).$$

Для определения $\Phi_0(\eta)$ можно выписать задачу, совпадающую с (2.36) – (2.38) (рисунок 19). Условие сращивания записывается в виде

$$\alpha_0 + M_*^4 \tilde{\alpha}_1 = \frac{F_* \Phi_{00}(\infty)}{[\Phi'_{00}(1)]^4} \lambda_0^{-1} = \frac{F_* d_2}{d_1^4} \lambda_0^{-1}. \quad (2.59)$$

Краевую задачу (2.57) можно решать, варьируя начальные условия задачи Коши для уравнений (2.57). В качестве начального условия выступает значение F , задаваемое функцией (2.56). При этом коэффициенты α_0 и $\tilde{\alpha}_1$ связаны соотношением (2.59). Таким образом, варьируя только значение α_0 и определяя $\tilde{\alpha}_1$ с помощью (2.59), необходимо найти то значение α_0 , при котором $F = 1$ при $\tau \rightarrow \infty$.

После того, как коэффициенты α_0 и $\tilde{\alpha}_1$ найдены, решается задача об определении функции $\Phi_1(\eta)$ в области G_1 . Алгоритм ее нахождения изложен в разделе 2.3.

Определение поля температур позволяет решить задачу о нахождении распределения циркуляции в области G_2 . В главном приближении функция γ должна подчиняться уравнению

$$\gamma'' - \frac{\gamma'}{\tau} + \frac{F'}{2F} \left(\gamma' - \frac{2\gamma}{\tau} \right) + \frac{1}{F} \left(\frac{1}{2} - v \right) \tau \gamma' = 0$$

с граничными условиями $\gamma = a_0$ при $\tau \rightarrow 0$ и $\gamma = 0$ при $\tau \rightarrow \infty$. В области G_1 для определения γ по-прежнему верна формула (2.25). Величина a_0 выбирается из условия сращивания

$$a_0 = \frac{(\kappa - 1) \operatorname{Pr} M_*^2}{d_1^3 \sqrt{\alpha_0}}.$$

На рисунках 25, 26 представлено поведение $\hat{T}(\tau) = \sqrt{\hat{F}(\tau)}$ и $\hat{\gamma}(\tau)$ (см. раздел 2.3), соответствующих случаю $M_* = 7$, $F_* = \text{Pr} = 1$ и $1/\ln \varepsilon_0 = -0.217$ (сплошные кривые), и численного решения уравнений Навье–Стокса при тех же значениях параметров (пунктир).

2.7 Численное решение

Асимптотическое решение задачи сравнивается с численным решением уравнений Навье–Стокса (2.1), которое производится методом конечного объёма 2-го порядка точности по пространству с разностями против потока и 1-го порядка по времени в круговой области $r_* \leq r \leq 10^3 r_*$ на радиально-симметричной сетке с 24000 ячейками. Число ячеек составляет 120 вдоль окружности $r = \text{const}$ и 200 вдоль радиуса; размер ячеек в радиальном направлении равен 10^{-3} у поверхности цилиндра $r = r_*$ и 20 на внешней границе расчётной области $r = 10^3 r_*$. На внешней границе ставится граничное условие невозмущённого потока; ошибка ввиду наличия радиального течения с ненулевым значением v оказывается приемлемой.

Все расчеты проведены при значениях безразмерных параметров $F_* = 1$, $\text{Pr} = 1$, $\text{Re} = 100$. Наибольший период времени, до которого был проведен расчет, соответствует значениям $\varepsilon_0 = 0.005$, $1/|\ln \varepsilon_0| \approx 0.189$ при $M_* = 1$; $\varepsilon_0 = 0.01$, $1/|\ln \varepsilon_0| \approx 0.217$ при $M_* = 7$. Дальнейший расчет в течение обозримого времени не позволяет существенно уменьшить значение малого параметра $1/\ln \varepsilon_0$ в разложениях (2.11) и (2.35). Шаг по времени Δt таков, что $r_*/\sqrt{\nu_\infty \Delta t} \approx 61.3$ при $M_* = 1$; $r_*/\sqrt{\nu_\infty \Delta t} \approx 12.5$ при $M_* = 7$.

Распределения циркуляции и температуры, полученные из численного решения уравнений Навье–Стокса, подтверждают асимптотическое решение и приведены на рисунках 21, 22, 25, 26.

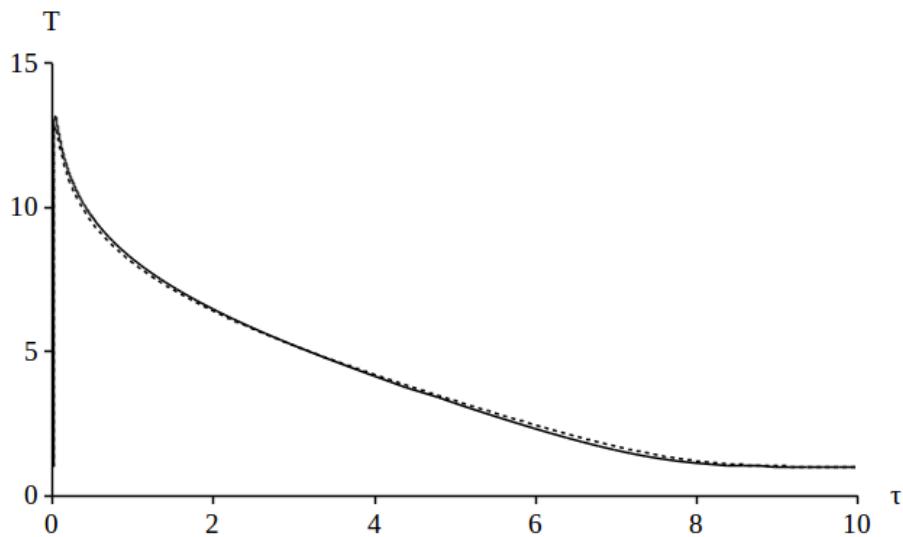


Рисунок 25 — Составное решение (сплошная кривая) и численное решение уравнений Навье–Стокса (пунктир) для температуры $T(\tau)$ при $M_* = 7$, $\text{Pr} = F_* = 1$ и $1/\ln \varepsilon_0 = -0.217$

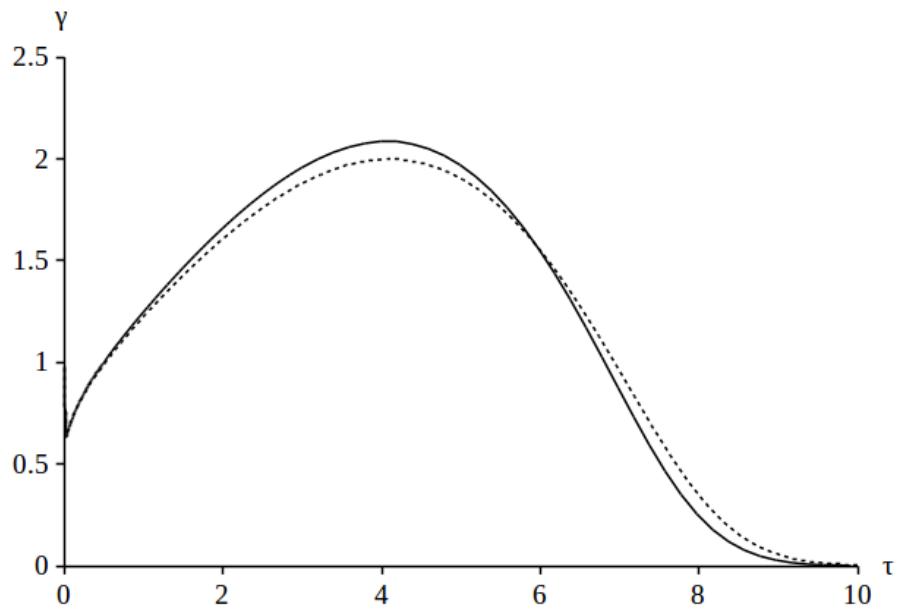


Рисунок 26 — Составное решение (сплошная кривая) и численное решение уравнений Навье–Стокса (пунктир) для циркуляции $\gamma(\tau)$ при $M_* = 7$, $\text{Pr} = F_* = 1$ и $1/\ln \varepsilon_0 = -0.217$

2.8 Выводы по главе 2

В нестационарной постановке получено асимптотическое решение на больших временах задачи о порождении осесимметричного вихря вращением

бесконечно протяжённого кругового цилиндра в сжимаемом газе с вязкостью, зависящей от температуры.

Продемонстрировано принципиальное влияние на решение градиента коэффициента динамической вязкости. Как в случае несжимаемой жидкости, линейный размер вязкой области растёт со временем пропорционально $\sqrt{v_0 t}$. Распределение циркуляции на масштабе $r \sim \sqrt{v_0 t}$ отличается от случая несжимаемой жидкости или сжимаемого газа с постоянной вязкостью на постоянный множитель, причём при одинаковых v_0 и t и при температуре цилиндра не ниже температуры невозмущенного газа скорость течения в сжимаемом газе с монотонно возрастающей (убывающей) зависимостью вязкости от температуры будет выше (ниже).

Распределение циркуляции на масштабе порядка радиуса цилиндра в основном приближении стационарно и при этом отличается от случая несжимаемой жидкости, в котором течение близко к потенциальному вихрю, качественно. Существуют режимы, на которых распределение циркуляции немонотонно. Данный результат является более полным по сравнению с решением задачи в стационарной постановке [97].

Глава 3. Взаимодействие локализованных вихрей с акустическими возмущениями

Результаты главы опубликованы в работах [4; 5].

3.1 Постановка и представление решения задачи

Рассмотрим общую задачу рассеяния, когда монохроматическая акустическая волна малой амплитуды

$$\mathbf{U}_{inc} = \tilde{\mathbf{U}}_{inc}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (3.1)$$

распространяется в стационарном потоке

$$\mathbf{U}_{vort} = \mathbf{U}_{vort}(\mathbf{r}) \quad (3.2)$$

идеального совершенного газа. Перейдём к безразмерным переменным

$$\bar{\rho} = \rho/\rho_\infty, \quad \bar{p} = p/p_\infty, \quad \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/c_\infty, \quad \bar{t} = \omega t, \quad \bar{\mathbf{r}} = k\mathbf{r}, \quad (3.3)$$

где ρ_∞ , p_∞ , $c_\infty = \sqrt{\kappa p_\infty / \rho_\infty}$ — плотность, давление и скорость звука в невозмущённом газе, ω — угловая частота и $k = \omega/c_\infty$ — волновое число падающей волны, κ — показатель адиабаты; далее чёрточки опускаются. Уравнения Эйлера имеют вид

$$\cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\kappa} \frac{\nabla p}{\rho} = 0, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{p}{\rho^\kappa} + \mathbf{v} \cdot \nabla \frac{p}{\rho^\kappa} = 0. \quad (3.6)$$

Амплитуда падающей волны и, для применимости борновского приближения

$$|\mathbf{U}_{scat}| \ll |\mathbf{U}_{inc}|, \quad (3.7)$$

числа Маха течения, предполагаются малыми:

$$M_* = \max |\mathbf{v}_{vort}| \ll 1, \quad (3.8)$$

$$a = \max |\mathbf{v}_{inc}| \ll 1. \quad (3.9)$$

Постановка (3.1)–(3.9) предполагает, что решение уравнений (3.4)–(3.6) зависит от параметра a и времени t только как от комбинации ae^{-it} и может быть представлено в виде двухпараметрического ряда по M_* , a :

$$\mathbf{U} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^1 M_*^i (ae^{-it})^j \mathbf{U}_{ij}(\mathbf{r}) + \dots \quad (3.10)$$

Учёт только линейной части по a , как в (3.1), позволяет отбросить комплексно сопряжённую часть. Здесь и далее многоточием обозначены члены, отличные от степенных (например, логарифмические, см. ниже), которые могут присутствовать в высших приближениях.

Часть (3.10), не зависящая от времени, описывает стационарное течение

$$\mathbf{U}_{vort} = \sum_{i=0}^{\infty} M_*^i \mathbf{U}_{i0}(\mathbf{r}). \quad (3.11)$$

Решение в приближении $O(1)$ — невозмущённый газ

$$\rho_{00} = p_{00} = 1, \quad \mathbf{v}_{00} = 0. \quad (3.12)$$

Будем считать, что энтропийная мода возмущений отсутствуют и \mathbf{U}_{vort} включает только вихревую моду. Тогда возмущения давления и плотности имеются только в чётных степенях по числу Маха:

$$\rho_{vort} = 1 + M_*^2 \rho_{20}(\mathbf{r}) + O(M_*^4), \quad p_{vort} = 1 + M_*^2 p_{20}(\mathbf{r}) + O(M_*^4), \quad (3.13)$$

а поле скорости — в нечётных:

$$\mathbf{v}_{vort} = M_* \mathbf{v}_{10}(\mathbf{r}) + O(M_*^3). \quad (3.14)$$

В главном приближении течение удовлетворяет условию несжимаемости:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{10} = 0. \quad (3.15)$$

Часть (3.10), зависящая от времени, описывает акустическое поле:

$$\mathbf{U}_{inc} + \mathbf{U}_{scat} = ae^{-it} \sum_{i=0}^{\infty} M_*^i \mathbf{U}_{i1}(\mathbf{r}) + \dots \quad (3.16)$$

Падающее поле есть часть (3.16), не зависящая от M_* :

$$\mathbf{U}_{inc} = a \mathbf{U}_{01}(\mathbf{r}) e^{-it}; \quad (3.17)$$

рассеянная волна — оставшаяся часть

$$\mathbf{U}_{scat} = ae^{-it} \sum_{i=1}^{\infty} M_*^i \mathbf{U}_{i1}(\mathbf{r}) + \dots \quad (3.18)$$

Таким образом, сумма «чистых» компонент (3.11) + (3.17) описывает суперпозицию поля течения и падающего акустического поля и задаётся по условию задачи. Сумма «смешанных» компонент (3.18) описывает результат их взаимодействия (рассеянное поле) и определяется в ходе решения. До тех пор пока представление степенным рядом равномерно пригодно, каждая из компонент удовлетворяет уравнениям, следующим из подстановки (3.10) в (3.4)–(3.6):

$$(\nabla^2 + j^2)\rho_{ij} = q_{ij}^\rho, \quad (\nabla^2 + j^2)p_{ij} = q_{ij}^p, \quad \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}_{ij}) + j^2 \mathbf{v}_{ij} = \mathbf{q}_{ij}^v, \quad (3.19)$$

где $\mathbf{q}_{ij}^U(\mathbf{r})$ — известные функции, описывающие взаимодействие между компонентами более низких порядков, с первым индексом меньшим либо равным i и вторым меньшим либо равным j . Для падающего поля (3.17) уравнения (3.19) будут однородными. Граничные условия задаются для каждой компоненты индивидуально.

Вышесказанное означает, что течение и падающая волна считаются взаимодействующими малыми возмущениями (вихревой и акустической моды, соответственно), а невозмущённый газ (3.12) фоновым состоянием. Корректность данной концепции обеспечивается условиями (3.8)–(3.9). Аналогичный подход с дополнительным предположением $a \ll M_*$ был применён в работах [20; 107]. Он является более последовательным по сравнению с общепринятым (не только в аэроакустике), когда волна считается малым возмущением на фоне вихря:

$$|\mathbf{U}_{inc}| \ll |\mathbf{U}_{vort}|, \quad (3.20)$$

и уравнения (3.4)–(3.6) линеаризуются относительно \mathbf{U}_{vort} . Действительно, предположение (3.20) нарушается в случаях типа ПВТВ, когда $\mathbf{v}_{vort} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ и $|\mathbf{v}_{inc}| = \text{const}$. Это справедливо для волн различной природы, например в геострофических течениях («near-inertial waves») [108–110], вращательных течениях мелкой воды [111; 112], стратифицированных течениях [113]. При этом в действительности относительная величина поля течения $O(M_*)$ и падающего акустического течения $O(a)$ не имеет значения, поскольку \mathbf{U}_{10} и \mathbf{U}_{01} определяются из (3.19) независимо друг от друга. Вследствие этого, с одной стороны, дополнительное предположение $a \ll M_*$ из [20; 107] является

излишним; с другой стороны, решение в рамках предположения (3.20) остаётся справедливым.

Представление в виде степенного ряда и, следовательно, уравнения (3.19) равномерно пригодны до тех пор, пока

$$M_* |\mathbf{U}_{i+1,1}| \ll |\mathbf{U}_{i1}|. \quad (3.21)$$

Борновское приближение (3.7) подразумевает, что данное предположение справедливо для главного приближения рассеянного поля:

$$M_* |\mathbf{U}_{11}| \ll |\mathbf{U}_{01}|. \quad (3.22)$$

При наличии нескольких пространственных масштабов в (3.1)–(3.2) возможно $|\mathbf{U}_{i+1,1}| \gg 1$, что может привести к нарушению (3.21) и появлению нестепенных членов высокого порядка в (3.18). К примеру, в [20] получены члены высокого порядка $O(M_*^i a \ln M_*)$ в случае ПВТВ, возникающие вследствие логарифмического поведения функции Грина уравнений (3.19) в ближнем пределе. При этом условие $a|\mathbf{U}_{i1}| \ll |\mathbf{U}_{i0}|$, похожее на (3.21), не требуется, поскольку \mathbf{U}_{i1} и \mathbf{U}_{i0} по-разному зависят от времени.

Разделение суммарного акустического поля (3.16) на падающее и рассеянное в действительности является нетривиальным вопросом, ответ на который может показаться неоднозначным [19]. В физическом эксперименте измеряются амплитуда A и фаза φ суммарного акустического поля [93], а не падающего или рассеянного поля по отдельности. Для простоты свяжем их с полем плотности:

$$\rho_{inc} + \rho_{scat} \equiv a A e^{i(\varphi - t)}, \quad (3.23)$$

и разложим в ряд по M_* :

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} M_*^i A_i(\mathbf{r}) + \dots, \quad \varphi = \sum_{i=0}^{\infty} M_*^i \varphi_i(\mathbf{r}) + \dots \quad (3.24)$$

Сравнивая (3.23)–(3.24) с (3.16), получим главное приближение

$$A_0 = |\rho_{01}|, \quad \varphi_0 = \arg \rho_{01} \quad (3.25)$$

и линейную поправку вследствие взаимодействия с течением

$$A_1/A_0 = \text{Real}(\rho_{11}/\rho_{01}), \quad \varphi_1 = \text{Imag}(\rho_{11}/\rho_{01}). \quad (3.26)$$

В данной работе падающее поле определяется формулой (3.17) как заданное акустическое поле в отсутствие среднего течения $M_* = 0$, так что

$$|\rho_{inc}| = aA_0, \quad \arg \rho_{inc} = \varphi_0 - t, \quad (3.27)$$

а рассеянное поле формулой (3.18), аналогично [20; 21].

Между тем, как показано в работе [14] для случая осесимметричного вихря (4), поле (3.18) является суммой двух составляющих:

$$\mathbf{U}_{scat} = \mathbf{U}_{rad} + \mathbf{U}_{dis}, \quad (3.28)$$

«собственно рассеянной волны», описывающей переизлучение звука

$$\mathbf{U}_{rad} = ae^{-it} \sum_{i=1}^{\infty} M_*^i \mathbf{U}_{i1}^r(\mathbf{r}) + \dots, \quad (3.29)$$

и слагаемого, описывающего искажение фронта падающей волны в результате переноса неоднородным полем скорости

$$\mathbf{U}_{dis} = ae^{-it} \sum_{i=1}^{\infty} M_*^i \mathbf{U}_{i1}^d(\mathbf{r}) + \dots \quad (3.30)$$

Изменение амплитуды и сдвиг фазы в линейном приближении представляются в соответствии с (3.28): $A_1 = A_1^r + A_1^d$, $\varphi_1 = \varphi_1^r + \varphi_1^d$, где каждая компонента определяется аналогично (3.26). Компонента «искажения» \mathbf{U}_{dis} не интерферирует с падающим полем:

$$A_1^d = 0, \quad (3.31)$$

Поэтому [19; 22; 29; 30; 33] считают данную компоненту частью падающего поля:

$$\mathbf{U}'_{inc} = a\mathbf{U}_{01}(\mathbf{r})e^{-it} + \mathbf{U}_{dis}. \quad (3.32)$$

Поле (3.32) удовлетворяет неоднородным уравнениям (3.19) с внепорядковым источниковым членом $O(M_*)$ [24; 73] и отличается от (3.17) формой линий фронта:

$$|\rho'_{inc}| = aA_0, \quad \arg \rho'_{inc} = \varphi_0 - t + O(M_*). \quad (3.33)$$

Рассеянное поле в этом случае отождествляется с компонентой «излучения»:

$$\mathbf{U}'_{scat} = \mathbf{U}_{rad}. \quad (3.34)$$

Таким образом, в литературе используются два разных значения терминов «падающая волна» и «рассеянная волна»; одна терминология соответствует (3.17), (3.28), другая — (3.32), (3.34). Относительная разница между двумя определениями составляет $O(M_*)$ для падающей волны и $O(1)$ для рассеянной.

Для устранения неоднозначности поставим условие сохранения полного потока энергии в области, где взаимодействие вихря со звуком несущественно. В разделе 3.3.8 показано, что в рассмотренном ниже случае оно выполняется, только если рассеянная волна определена согласно (3.28). Это делает терминологию (3.17), (3.28), выбранную в данной статье, физически более осмысленной, чем (3.32), (3.34).

3.2 Корректность постановки

В борновском приближении (3.7) в случае (3.1), (3.2) решение для рассеянного поля в главном приближении $\mathbf{U}_{11}(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца (3.19)

$$\nabla^2 \rho_{11} + \rho_{11} = q_{11} \quad (3.35)$$

с источниковым членом (индекс « ρ » далее опускается), который с учётом (3.15) принимает вид

$$q_{11} = -2 \frac{\partial^2 (v_{10\alpha} v_{01\beta})}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} = -2 \nabla \cdot (\mathbf{v}_{10} \cdot \nabla \mathbf{v}_{01}). \quad (3.36)$$

Источник (3.36) описывает взаимодействие падающей волны с полем скорости течения и соответствует квадрупольям Лайтхилла [23; 114]. Поля давления и скорости выражаются через поле плотности подстановкой (3.10) в (3.5)–(3.6):

$$p_{11} = \kappa \rho_{11}, \quad \mathbf{v}_{11} = -i(\nabla \rho_{11} + \mathbf{v}_{10} \cdot \nabla \mathbf{v}_{01} + \mathbf{v}_{01} \cdot \nabla \mathbf{v}_{10}). \quad (3.37)$$

Далее будем рассматривать случай двумерного пространства (с очевидным обобщением на трёхмерное). Зададим условие излучения Зоммерфельда для уравнения (3.35), т. е. предположим, что существует некоторое дальнее поле $r \gg r_F$, в котором рассеянное поле имеет вид уходящей на бесконечность цилиндрической волны (3):

$$\frac{\partial \rho_{11}}{\partial r} - i \rho_{11} = o(r^{-1/2}) \quad \text{при} \quad r/r_F \rightarrow \infty. \quad (3.38)$$

Часто добавляемое условие

$$\rho_{11} = O(r^{-1/2}) \quad \text{при } r/r_F \rightarrow \infty, \quad (3.39)$$

избыточно, поскольку оно выполняется для любого решения однородного уравнения Гельмгольца, удовлетворяющего (3.38) [18; 115]. Краевую задачу (3.35), (3.38) будем называть ЗИ (задача излучения).

Условие (3.38) естественно в случае, когда источник (3.36) достаточно быстро затухает на больших расстояниях, поскольку оно исключает волны, приходящие из бесконечности. В этом случае решение ЗИ единственно [78] и представляется в виде свёртки источникового члена с функцией Грина уравнения Гельмгольца:

$$\rho_{11} = -\frac{i}{4} \int_{\mathbb{R}^2} q_{11}(\mathbf{r}') H_0^{(1)}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d^2 \mathbf{r}', \quad (3.40)$$

где $H_0^{(1)}(r)$ — функция Ганкеля 1-го рода. ЗИ корректна, если интеграл в (3.40) сходится абсолютно и некорректна в противном случае, поскольку кратный интеграл сходится только в случае абсолютной сходимости [37]. Из вида (3.36) и дальней асимптотики функции Ганкеля

$$H_0^{(1)}(r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{ir - i\pi/4} \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad (3.41)$$

следует критерий корректности двумерной задачи рассеяния в борновском приближении с условием излучения:

$$|q_{11}| = O(r^{-n}), \quad n > 3/2 \quad \text{при } r/R \rightarrow \infty, \quad (3.42)$$

или, без ограничения общности,

$$|\mathbf{v}_{10}| |\mathbf{v}_{01}| = O(r^{-n}), \quad n > 3/2 \quad \text{при } r/R \rightarrow \infty, \quad (3.43)$$

где R — подходящий пространственный масштаб. В трёхмерном случае в (3.42), (3.43) получим $n > 2$ вместо $n > 3/2$.

При $|\mathbf{v}_{01}| = \text{const}$ условие (3.43) сводится к

$$|\mathbf{v}_{10}| = O(r^{-n}), \quad n > 3/2 \quad \text{при } r/R \rightarrow \infty. \quad (3.44)$$

Отсюда следует, что задача в случае ПВТВ и, шире, задача рассеяния однородной плоской волны произвольным течением с ненулевой суммарной

циркуляцией некорректна. Противоречия здесь нет, так как полная кинетическая энергия течения несжимаемой жидкости в пространстве без границ с $|\mathbf{v}_{10}| \propto r^{-1}$ при $r/R \rightarrow \infty$ бесконечна:

$$E_{vort} \propto \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{v}_{10}|^2 d^2 \mathbf{r} \propto \int^{\infty} \frac{dr}{r} = \infty, \quad (3.45)$$

следовательно, оно не может существовать, как было отмечено в работах [10; 34]. В трёхмерном пространстве без границ могут возникать только вихревые структуры с нулевой суммарной циркуляцией по любому поперечному сечению, такие как вихревой след за самолётом с крылом большого удлинения, состоящий из двух вихревых трубок с противоположными циркуляциями, или вихревое кольцо вертолёта. Примеры корректно поставленных задач рассеяния приведены во введении в разделе «**Степень разработанности темы**». Поскольку вихри, затухающие по степенному закону с дробным показателем, неизвестны, на практике условие (3.44) эквивалентно условию нулевой суммарной циркуляции:

$$\Gamma \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r/R \rightarrow \infty, \quad (3.46)$$

или, для течений без особенностей, условию конечности кинетической энергии.

Вместе с тем в случае $|\mathbf{v}_{01}| = \text{const}$ и гипотетического вихря с $|\mathbf{v}_{10}| \propto r^{-3/2}$ при $r/R \rightarrow \infty$ ЗИ излучения некорректна, несмотря на (3.46). Здесь также нет противоречия, поскольку полный поток энергии однородной плоской волны бесконечен:

$$W_{inc}(x) \propto \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{v}_{01}|^2 dy \propto \int_{-\infty}^{\infty} dy = \infty, \quad (3.47)$$

следовательно, она не может существовать. Здесь x, y — декартовы координаты, причём x отсчитывается вдоль волнового вектора. Естественное акустическое поле с конечным полным потоком энергии, излучаемое локализованным источником в двумерном пространстве, представляет собой цилиндрическую волну вида (3). В случае, когда такой вид имеет падающее поле: $|\mathbf{v}_{01}| \propto r^{-1/2}$ при $r/R \rightarrow \infty$, условие (3.43) сводится к (3.46). Таким образом, задача рассеяния корректна для любой физически реализуемой постановки $E_{vort} < \infty, W_{inc} < \infty$. При этом существуют физически нереализуемые задачи, которые тем не менее ставятся корректно; это имеет место, когда (3.43) выполняется несмотря на то, что одна из величин E_{vort}, W_{inc} бесконечна. Примеры с экспоненциальным

затуханием были предложены в работе [36] (см. введение). Вместе с тем, постановка с цилиндрической падающей волной и вихрем с ненулевой циркуляцией, предложенная в работе [22] (без использования борновского приближения), в борновском приближении остаётся некорректной из-за $|\mathbf{v}_{10}||\mathbf{v}_{01}| \propto r^{-3/2}$ при $r/R \rightarrow \infty$.

3.3 Взаимодействие акустических возмущений с экспоненциально затухающим цилиндрическим вихрем

3.3.1 Постановка задачи

Сформулируем корректно поставленную ЗИ для случая, в некотором смысле близкого к ПВТВ, но в котором область взаимодействия волны и вихря будет ограниченной. Это означает, что необходимо задать источник (3.36), удовлетворяющий условию (3.42). Для совместности с имеющимися результатами сосредоточимся на случае рассеяния однородной плоской волны осесимметричным вихрем с полем окружной скорости (1), близким к (4) в пределах ограниченной области и достаточно быстро затухающим на бесконечности в соответствии с (3.44).

Подходящее течение возникает в задаче, рассмотренной в главе 2, в главном приближении в случае несжимаемой жидкости $M_* = 0$ или сжимаемого газа при малых числах Маха $M_* \ll 1$ и малом перепаде температур $|F_* - 1| \ll 1$. Действительно, поместим бесконечно протяжённый полый твёрдый круговой цилиндр радиуса r_* в покоящийся вязкий сжимаемый газ и начиная с момента $t = 0$ будем вращать вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью $\Gamma_*/2\pi r_*^2$. Температуру стенки цилиндра будем считать равной температуре невозмущённого газа. В главном приближении при малых числах Маха $M_* = \Gamma_*/(2\pi r_* c_\infty) \ll 1$ распределение циркуляции будет иметь вид

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_*} \sim \begin{cases} (r/r_*)^2, & r/r_* = O(1), \quad r \leq r_* \\ 1, & r/r_* = O(1), \quad r > r_* \quad \text{при} \quad r_*/\sqrt{v_\infty t} \rightarrow 0, \\ e^{-r^2/(4v_\infty t)}, & r/\sqrt{v_\infty t} = O(1) \end{cases} \quad (3.48)$$

где ν_∞ — кинематическая вязкость невозмущённого газа. Такое течение представляет собой вихрь Ранкина, экранированный нестационарным вихревым слоем с противоположной суммарной циркуляцией, и эквивалентно разности потенциального вихря и вихря Лэмба–Оззена [96] вне цилиндра [10] и твердотельному вращению внутри цилиндра.

Задачу рассеяния можно организовать следующим образом. В достаточно удалённый момент $t = t_0$, когда эффективный радиус вихря $L = 2\sqrt{\nu_\infty t_0}$ велик по сравнению с радиусом цилиндра r_* , цилиндр изымается. Из области $r \gg L$ запускается однородная плоская акустическая волна. Длина волны $2\pi/k$ предполагается намного большей r_* и намного меньшей L . До тех пор, пока вязкой диффузией можно пренебречь [116] и считать течение стационарным — на временах $t - t_0 \ll r_*^2/\nu_\infty$ — справедливы уравнения Эйлера. Периодическое по времени акустическое поле устанавливается в области $r/r_F = O(1)$ после того, когда падающая волна проходит сквозь неё, т. е. на временах $t - t_0 \gg r_F/c_\infty$. Чем дольше длилось вращение цилиндра, тем более протяжённой будет область $r \ll L$, в которой (3.48) сводится к вихрю Ранкина, соответствующему случаю ПВТВ (4). В промежуточной области $r_* < r \ll L$ рассеянное поле будет существовать на фоне потенциального поля скорости, индуцируемого точечным вихрем с интенсивностью Γ_* .

Выше были использованы следующие предположения: 1) числа Маха малы (3.8); 2) имеется временной промежуток, на протяжении которого акустическое поле периодично по времени в области, в которой оно достигает своей дальней асимптотики (3); 3) имеется область, содержащая много длин волн, в которой поле скорости близко к полю точечного вихря (3.53). Для выполнения второго условия падающая волна должна успеть пройти через область $r/r_F = O(1)$ намного раньше, чем нарушится периодичность по времени; последнее может произойти вследствие: а) вязкой диффузии вихря на временах $O(r_*^2/\nu_\infty)$; б) акустической неустойчивости вихря Ранкина на временах $O(r_*^6 c_\infty^4 / \Gamma_*^5)$ [117; 118]; в) нелинейного самопереноса волны на временах $O(\omega^{-1}/a)$. Таким образом, задача рассеяния в приведённой в разделе 3.1 постановке реализуется при следующих соотношениях между пространственными масштабами:

$$\max(\nu_\infty/c_\infty, \Gamma_*/c_\infty) \ll r_* \ll k^{-1} \ll L \ll r_F,$$

$$r_F \ll c_\infty(t - t_0) \ll \min(r_*^6 c_\infty^5 / \Gamma_*^5, r_*^2 c_\infty / \nu_\infty, k^{-1}/a). \quad (3.49)$$

В безразмерных переменных требование, что r_F/c_∞ должно быть намного короче трёх перечисленных временных масштабов, приводит к дополнительным ограничениям на малые параметры (3.8), (3.9), (3.53):

$$M_*^5 \ll \beta \varepsilon^2, \quad M_* \ll \operatorname{Re} \beta \varepsilon^2, \quad a \ll \varepsilon^2, \quad (3.50)$$

из которых первое связана с наступлением неустойчивости, второе — с диффузией и третье — с нелинейной конвекцией. Здесь безразмерные параметры β и ε определены соотношениями (3.53); $\operatorname{Re} = \Gamma_*/\nu_\infty$; для безразмерного r_F использовано соотношение (3.70).

Для применения теории возмущений необходимо также борновское приближение (3.22). Из уравнения (3.35) с источником (3.58), (3.54) можно заключить, что достаточным является условие высокочастотного рассеяния, т. е. угловая частота падающей волны должна быть велика по сравнению с максимальной угловой скоростью течения:

$$M_*/\beta = \Gamma_*/(2\pi\omega r_*^2) \ll 1. \quad (3.51)$$

В действительности достаточное условие является менее строгим, чем (3.51), хотя и более строгим, чем (3.8):

$$M_* \ll \beta \quad \text{or} \quad M_* \ll 1, \quad M_* \neq \beta/n + O(\beta^2), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.52)$$

Последнее из ограничений связано с тем фактом, что вихрь Ранкина может излучать звук на собственных частотах nM_*/β , где M_*/β — безразмерная угловая скорость в области $r < \beta$. При угловой частоте падающей волны, близкой к одной из собственных частот, происходит резонансное усиление и амплитуда рассеянного поля становится порядка амплитуды падающего [20; 22; 119].

С использованием безразмерных параметров

$$\beta = kr_* \ll 1, \quad \varepsilon = 1/(kL) \ll 1 \quad (3.53)$$

и безразмерной циркуляции $\bar{\Gamma} = \Gamma/\Gamma_*$ (чёрточка далее опускается), распределение (3.48) переписывается в виде

$$\Gamma \sim \begin{cases} (r/\beta)^2, & r/\beta = O(1), \quad r \leq \beta \\ 1, & r/\beta = O(1), \quad r > \beta \quad \text{при} \quad \beta \varepsilon \rightarrow 0, \\ e^{-\varepsilon^2 r^2}, & \varepsilon r = O(1) \end{cases} \quad (3.54)$$

причём $\beta \varepsilon = \varepsilon_0/2$, где ε_0 – малый параметр из главы 2. Переопределим безразмерные функции $\mathbf{U}_{ij}(\mathbf{r})$, заменяя максимальное число Maxa $M_* = \Gamma_*/(2\pi r_* c_\infty)$ в разложении (3.10) числом Maxa на масштабе длины акустической волны $r = 1$:

$$M_\lambda = M_* \beta = k \Gamma_*/(2\pi c_\infty). \quad (3.55)$$

Тогда однородная плоская падающая волна, удовлетворяющая линеаризованным уравнениям (3.4)–(3.6), принимает вид

$$\rho_{01} = e^{i\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}}, \quad p_{01} = \kappa e^{i\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{v}_{01} = \hat{\mathbf{k}} e^{i\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.56)$$

а осесимметричный вихрь (1) – вид

$$\rho_{10} = 0, \quad p_{10} = 0, \quad \mathbf{v}_{10} = \frac{\Gamma(r)}{r} \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (3.57)$$

Приближения более высоких порядков не входят в уравнение (3.36)–(3.37), определяющее рассеянное поле в главном приближении, и потому не представляют интереса в контексте задачи рассеяния. Источник (3.36), (3.56)–(3.57) принимает вид

$$q_{11} = -2i\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \left[\frac{\hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{k}})}{r^2} \Gamma(r) e^{i\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}} \right], \quad (3.58)$$

где $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}$ – единичный вектор вдоль вектора завихренности.

Вследствие (3.53) в интересующей нас области $r \gg 1$ рассеянное поле (3.40) для источника (3.58), (3.54) в главном приближении не зависит от β , т. е. распределение завихренности в ядре вихря не играет роли [21]. Это позволяет положить $\beta = 0$ в ЗИ, так что (3.54) упрощается до

$$\Gamma = e^{-\varepsilon^2 r^2}. \quad (3.59)$$

Действительная часть источника (3.58), (3.59) при $\varepsilon = 0.05$ показана на рисунке 27а.

Решение ЗИ для источника (3.58), (3.59) является центральным пунктом данного раздела. Экспоненциальное затухание

$$\Gamma = O((\varepsilon r)^{-\infty}) \quad \text{при} \quad \varepsilon r \rightarrow \infty \quad (3.60)$$

обеспечивает корректность постановки при $\varepsilon > 0$. Подстановка $\varepsilon = 0$ в (3.59) ведёт к случаю ПВТВ с точечным вихрем $\Gamma = 1$, в котором задача рассеяния

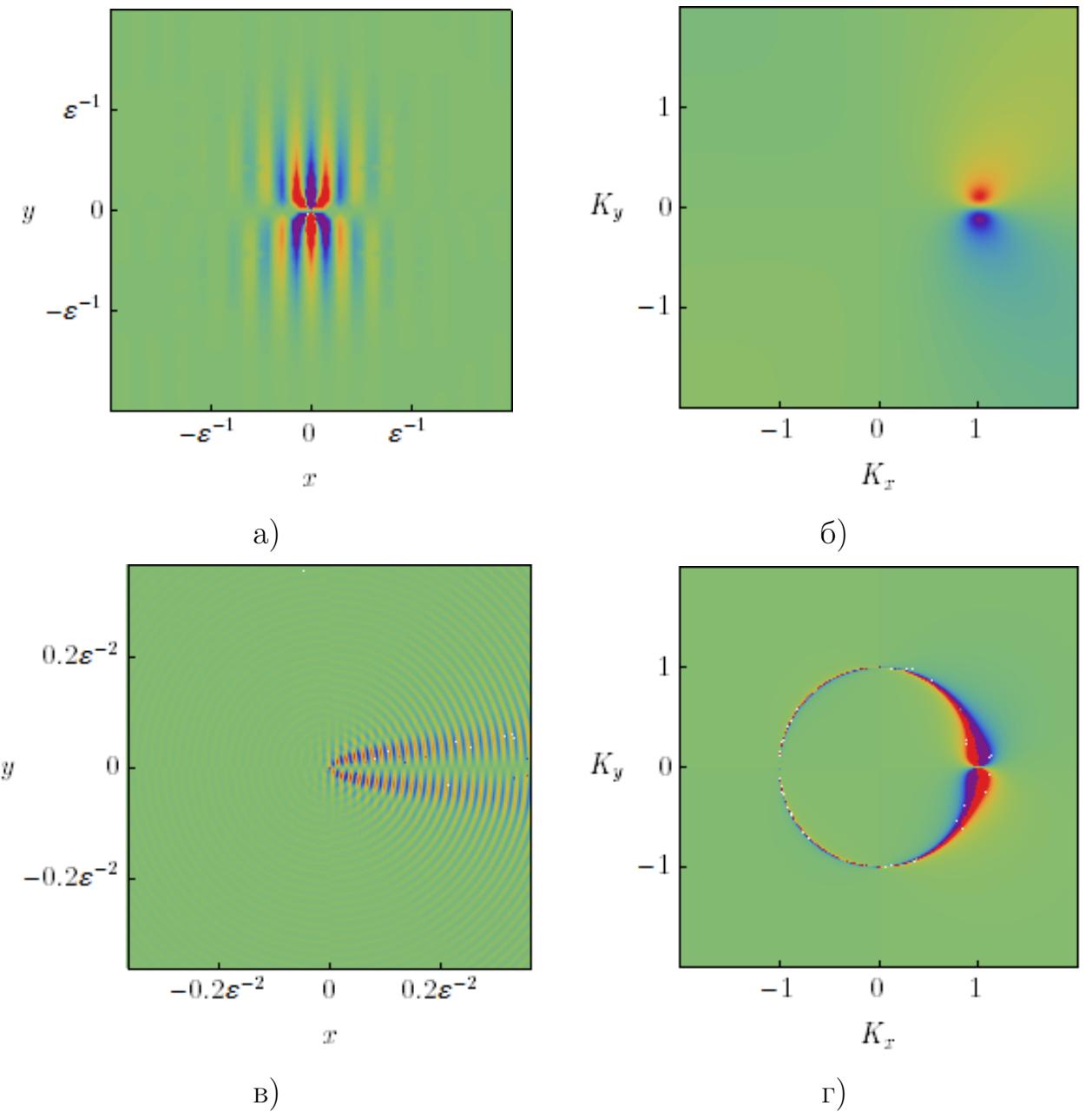


Рисунок 27 — Поля, относящиеся к рассеянной волне: а — источник $\text{Real}(q_{11})$ (3.58), б — Фурье-образ источника $\text{Imag}(\hat{q}_{11})$ (3.74), в — решение $\text{Real}(\rho_{11})$ (A.1), (A.4)–(A.10), г — Фурье-образ решения $\text{Imag}(\hat{\rho}_{11})/(1 - K^2)$ при $\Gamma(r) = \exp(-\varepsilon^2 r^2)$, $\varepsilon = 0.05$. Показанные диапазоны значений: $-0.2 < \text{Real}(q_{11}) < 0.2$, $-\varepsilon^{-1} < \text{Imag}(\hat{q}_{11}) < \varepsilon^{-1}$, $-2.62 < \text{Real}(\rho_{11}) < 2.62$ и $-2\varepsilon^{-1} < \text{Imag}(\hat{\rho}_{11}) < 2\varepsilon^{-1}$

некорректна. Целью является получить решение в главном приближении при $\varepsilon \rightarrow 0$, когда имеется два пространственных масштаба, различных на рисунке 27а: длина волны $r = O(1)$ и эффективный радиус вихря $\varepsilon r = O(1)$. При этом не требуется использовать метод срациаемых асимптотических разложений, поскольку известно точное решение (3.40). Особый интерес представляет решение в промежуточной области $r \rightarrow \infty$, $\varepsilon r \rightarrow 0$, где вихрь близок к потенциальному, как в случае ПВТВ:

$$\Gamma \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \varepsilon r \rightarrow 0. \quad (3.61)$$

Предложенная в работе [36] модель $\Gamma = \exp(-\varepsilon r)$ также удовлетворяет (3.60) и (3.61), но не имеет ясного физического смысла и, по-видимому, требует более громоздких вычислений.

3.3.2 Представление решения

Получим сначала точное представление решения общей корректно поставленной ЗИ, не содержащее неэлементарных функций. Применим двумерное преобразование Фурье

$$\widehat{\rho}_{11}(\mathbf{K}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \rho_{11}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} d^2\mathbf{r}, \quad \widehat{q}_{11}(\mathbf{K}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} q_{11}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} d^2\mathbf{r} \quad (3.62)$$

к уравнению Гельмгольца (3.35). Вследствие условия излучения (3.39)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \nabla^2 \rho_{11} e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} d^2\mathbf{r} = -K^2 \widehat{\rho}_{11}. \quad (3.63)$$

Из уравнений (3.62), (3.63) следует

$$(1 - K^2) \widehat{\rho}_{11} = \widehat{q}_{11}. \quad (3.64)$$

Выражаем $\widehat{\rho}_{11}$ и берём обратное преобразование Фурье:

$$\rho_{11} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{\widehat{q}_{11}(\mathbf{K})}{1 - K^2} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} d^2\mathbf{K}, \quad (3.65)$$

Двумерный цикл $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^2$ в (3.65) представляет собой плоскость \mathbb{R}^2 , деформированную таким образом, что особая окружность $K = 1$, соответствующая

собственным решениям оператора Гельмгольца, обходится так, чтобы удовлетворить условию излучения (3.38):

$$\operatorname{Real}(\mathbf{K}) \cdot \operatorname{Imag}(\mathbf{K}) < 0 \quad \text{при } \mathbf{K} \in \mathcal{C} \quad \text{вблизи } K = 1, \quad (3.66)$$

что эквивалентно условию причинности (см. введение). Представление (3.65) с циклом \mathcal{C} и правилом обхода (3.66) и представление (3.40) эквивалентны и связаны друг с другом через теорему о свёртке.

Источник (3.58), (3.59) локализован в пределах области течения $\varepsilon r = O(1)$. Следовательно, в области покоящегося газа $\varepsilon r \rightarrow \infty$ можно использовать дальнюю асимптотику (3.41) функции Грина в (3.40): каждая из элементарных волн, исходящих из области $\varepsilon r' = O(1)$, преодолевает большое расстояние $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg 1$. Расстояние раскладывается в степенной ряд по \mathbf{r}' :

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' + \frac{(\hat{\theta} \cdot \mathbf{r}')^2}{2r} + O\left(\frac{1}{\varepsilon^3 r^2}\right) \quad \text{при } \varepsilon r \rightarrow \infty. \quad (3.67)$$

В знаменателе (3.41) можно учитывать только главный член в (3.67), но в показателе экспоненты необходимо сохранять все члены.

Наибольшее возможное упрощение в экспоненте (3.41) — линеаризация (3.67) по \mathbf{r}' , известное как приближение Фраунгофера. Оно применимо только в области $\varepsilon^2 r \rightarrow \infty$ — наиболее дальней части области покоящегося газа. Производя подстановку в (3.40) и используя (3.37), получаем уходящую цилиндрическую волну (3)

$$\rho_{11} \sim \frac{e^{ir - i\pi/4}}{\sqrt{r}} f(\theta), \quad \mathbf{v}_{11} \sim \hat{\mathbf{r}} \rho_{11} \quad \text{при } \varepsilon^2 r \rightarrow \infty \quad (3.68)$$

с амплитудой рассеяния

$$f = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{q}_{11}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (3.69)$$

где \hat{q}_{11} — Фурье-образ источника (3.62). Аргумент $\hat{\mathbf{r}}$ отражает направление распространения звука в дальнем поле. Решение (3.68), (3.69) удовлетворяет условию излучения (3.38) и в главном приближении уравнению Гельмгольца (3.35), которое будет однородным из-за (3.60). Оно также может быть получено из (3.65) с помощью метода перевала в многомерном пространстве [120].

В области $\varepsilon^2 r = O(1)$ необходимо учитывать квадратичный член в (3.67), зависящий от \mathbf{r} , что приводит к нарушению (3.68). Это определяет границу

дальнего поля согласно (3.38):

$$r_F = \varepsilon^{-2}. \quad (3.70)$$

Формула (3.70) показывает, что ближнее поле $r/r_F = O(1)$, в котором рассеянное поле отлично от (3.68), намного больше области течения. Таким образом, картина рассеяния будет многомасштабной, в том числе в области покоящегося газа $\varepsilon r \rightarrow \infty$.

3.3.3 Качественный анализ

Преобразование Фурье от источника (3.58) в результате интегрирования по частям сводится к преобразованию Фурье от продольной компоненты скорости (3.57) с аргументом, сдвинутым на волновой вектор $\hat{\mathbf{k}}$ падающей волны (3.56):

$$\widehat{q}_{11}(\mathbf{K}) = \frac{1}{\pi} \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{k}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{k}})}{r^2} \Gamma(r) e^{-i(\mathbf{K} - \hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{r}} d^2 \mathbf{r}. \quad (3.71)$$

Согласно принципу неопределённости, преобразование Фурье (3.71) источника (3.58), (3.59), распределённого в пределах области $r = O(\varepsilon^{-1})$, локализовано в окрестности волнового вектора падающей волны $|\mathbf{K} - \hat{\mathbf{k}}| = O(\varepsilon)$. Это приводит к значительному усилению рассеянного звука в направлении падения вследствие конструктивной интерференции элементарных волн: мгновенная разность фаз $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}$ компенсируется разностью хода $-\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}$. В частности, решение в дальнем поле (3.69) локализовано в пределах малых углов рассеяния $|\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{k}}| \sim \theta = O(\varepsilon)$, т. е. достигает там максимума. Преобразование Фурье точного решения (3.65) достигает максимума в той части окрестности $|\mathbf{K} - \hat{\mathbf{k}}| = O(\varepsilon)$, которая соответствует волновому числу $K = 1$, как у падающей волны, — на параболической кривой, локализованной в области $|K_x - 1| = O(\varepsilon^2)$, $|K_y| = O(\varepsilon)$, где $K_x = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{K}$ и $K_y = \hat{\mathbf{z}} \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{K})$ — декартовы координаты \mathbf{K} (см. рисунок 28). Согласно принципу неопределённости, решение распределено в области $x = O(\varepsilon^{-2})$, $|y| = O(\varepsilon^{-1})$ ориентированной в переднем направлении, где $x = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} = r \cos \theta$ и $y = \hat{\mathbf{z}} \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}) = r \sin \theta$ — декартовы координаты. Это подсказывает, что решение имеет вид уходящей цилиндрической волны (3.68) вне этой области и некоторый другой вид внутри. В случае плоской падающей

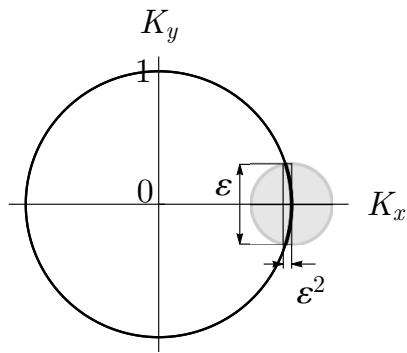


Рисунок 28 — Асимптотические области Фурье-образа источника $\widehat{q}_{11}(\mathbf{K})$ и Фурье-образа решения $\widehat{\rho}_{11}(\mathbf{K})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, представленных на рисунках 27б, 27г. Фурье-образ источника локализован в пределах закрашенного круга. Фурье-образ решения имеет особенность на большой окружности. Жирная кривая — их пересечение

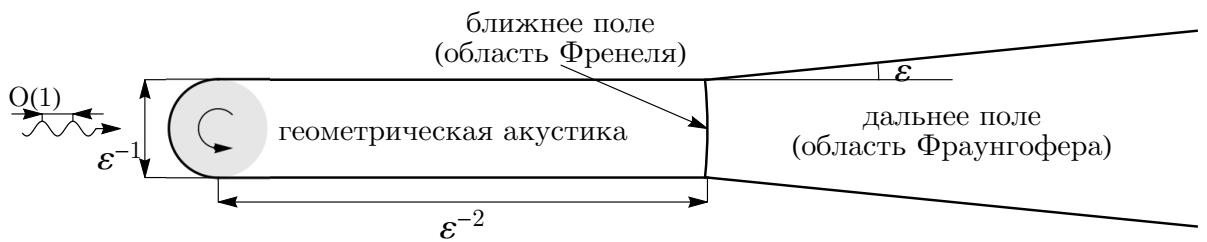


Рисунок 29 — Асимптотические области источника $q_{11}(\mathbf{r})$ и решения $\rho_{11}(\mathbf{r})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, представленных на рисунках 27а, 27в. Закрашенный круг соответствует области потенциального течения $\varepsilon r \rightarrow 0$

волны (3.56) в ближнем поле остаётся область течения $r = O(\varepsilon^{-1})$ и «след» длиной $O(\varepsilon^{-2})$ за ней (см. рисунок 29); остальная её часть вырождается в дальнее поле, так что граница (3.70) сжимается до

$$r_F(\theta) = \begin{cases} \varepsilon^{-2}, & \theta/\varepsilon = O(1) \\ \varepsilon^{-1}/\theta, & \theta/\varepsilon \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (3.72)$$

сохраняя своё положение на малых углах. Отметим, что рисунок 29, как и рисунок 32 ниже, подразумевает гомоморфизм, который ставит в соответствие отношения порядка «много меньше» и «меньше», а также «одного порядка» и «приближённо равно», так что значения одного порядка показаны как тождественные; в частности, области $\varepsilon^2 r \rightarrow \infty$ и $\varepsilon^2 r \rightarrow 0$ показаны как области, а область $\varepsilon^2 r = O(1)$ без $\varepsilon^2 r \rightarrow 0$ — как кривая.

Имеется глубокая аналогия между картиной рассеяния в данной задаче и картиной дифракции в задаче о коротковолновой дифракции плоской волны

на щели в случае, когда длина волны порядка $O(1)$, а ширина щели $O(\varepsilon^{-1})$. Детальное описание можно найти в книгах [121; 122], где рассмотрено рассеяние плоской волны турбулентным течением в ограниченном объёме. Причиной является аналогия между представлением (3.40) и двумерной формулой дифракции Кирхгофа [77; 123], основанных на уравнении Гельмгольца (3.35); при этом в задаче рассеяния потоком источник распределён, а в задаче дифракции на щели сосредоточен на отверстии. В переднем направлении, где, как правило, интересна картина дифракции, дальнее поле $\varepsilon^2 r \rightarrow \infty$ можно отождествить с областью дифракции Фраунгофера, а ближнее поле $\varepsilon^2 r = O(1)$ — с областью дифракции Френеля. Угловая область $\Theta/\varepsilon = O(1)$ аналогична области, заданной условием Брэгга-Вульфа [79]. Подобласть $\varepsilon^2 r \rightarrow 0$ ближнего поля интерпретируется как область геометрической акустики, в которой длина акустической волны не влияет на структуру решения, т. е. волна движется как пучок лучей. Вместе с тем в [27] отмечено, что приближение геометрической акустики, исследованное в работах [26; 27; 124; 125] для случая ПВТВ, не имеет общего диапазона применимости с борновским приближением; это препятствует прямому сравнению результатов.

Далее рассматривается случай $\Gamma = \exp(-\varepsilon^2 r^2)$. Фурье-образ источника (3.71) вычисляется с помощью соотношения, которое можно вывести с помощью теоремы о свёртке и которое было использовано в работе [15], где рассматривался случай ПВТВ для вихря Лэмба–Озена:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{k}})}{r^2} e^{-\varepsilon^2 r^2} e^{-i\alpha \cdot \mathbf{r}} d^2 \mathbf{r} = -i \frac{\hat{\mathbf{z}} \cdot (\boldsymbol{\alpha} \times \hat{\mathbf{k}})}{\alpha^2} \left(1 - e^{-\alpha^2/4\varepsilon^2} \right). \quad (3.73)$$

Подстановка (3.73) в (3.71) даёт

$$\hat{q}_{11}(\mathbf{K}) = -2i \frac{\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{k}})}{|\mathbf{K} - \hat{\mathbf{k}}|^2} \left(1 - e^{-|\mathbf{K} - \hat{\mathbf{k}}|^2/4\varepsilon^2} \right). \quad (3.74)$$

Поля мнимой части Фурье-образа источника (3.74) и Фурье-образа решения (3.74)/(1 - K^2) при $\varepsilon = 0.05$ показаны на рисунках 27б и 27г, соответственно (ср. с рисунком 28).

Вычисления, проделанные с помощью точного представления (3.65) с правилом обхода (3.66) для Фурье-образа источника (3.74), представлены в приложении А. Аналитическое решение получено в дальнем поле $\varepsilon^2 r \rightarrow \infty$, в области больших углов $\Theta/\varepsilon \rightarrow \infty$ и в области геометрической акустики $\varepsilon^2 r \rightarrow 0$. Условие $r \rightarrow \infty$ предполагается всюду и ниже будет опущено.

3.3.4 Асимптотическое решение в дальнем поле

Амплитуда рассеяния в дальнем поле может быть найдена прямой подстановкой (3.74) в (3.69):

$$f = f_0(1 - e^{-|\hat{r} - \hat{k}|^2/4\epsilon^2}) \sim f_0(1 - e^{-\theta^2/4\epsilon^2}), \quad (3.75)$$

где

$$f_0 = -\sqrt{2\pi} \frac{\hat{r} \cdot \hat{k} \hat{z} \cdot (\hat{r} \times \hat{k})}{|\hat{r} - \hat{k}|^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \quad (3.76)$$

есть в точности выражение (i) для случая ПВТВ, имеющее особенность при $\theta = 0$; $|\hat{r} - \hat{k}| = 2 \sin(\theta/2)$.

Аналогичным образом в работе [36] получено решение для случая $\Gamma = \exp(-\epsilon r)$:

$$f = f_0 \frac{|\hat{r} - \hat{k}|^2/\epsilon^2}{\sqrt{1 + |\hat{r} - \hat{k}|^2/\epsilon^2} (1 + \sqrt{1 + |\hat{r} - \hat{k}|^2/\epsilon^2})}, \quad (3.77)$$

где, как в (3.75), допускается замена $|\hat{r} - \hat{k}| \rightarrow \theta$. Масштаб дальнего поля $\epsilon^2 r \rightarrow \infty$, в котором применимо решение (3.77), в [36] не был определён. Между тем, в ближнем поле $\epsilon^2 r = O(1)$ решение (3.77) некорректно, а в области течения $\epsilon r = O(1)$ оно вообще не удовлетворяет уравнению Гельмгольца (3.35) (объяснение см. в разделе 3.4).

Каждое из решений (3.75) и (3.77) представляет собой регулярное распределение с максимумом на малых углах рассеяния:

$$f = O(\epsilon^{-1}), \quad |\mathbf{U}_{11}| = O(\epsilon^{-1}/\sqrt{r}) \ll 1 \quad \text{при} \quad \theta/\epsilon = O(1), \quad (3.78)$$

$$f = O(1), \quad |\mathbf{U}_{11}| = O(1/\sqrt{r}) \quad \text{при} \quad \theta = O(1), \quad (3.79)$$

и срашивается с выражением (i) на больших углах (рисунок 30):

$$f \sim f_0 \quad \text{при} \quad \theta/\epsilon \rightarrow \infty. \quad (3.80)$$

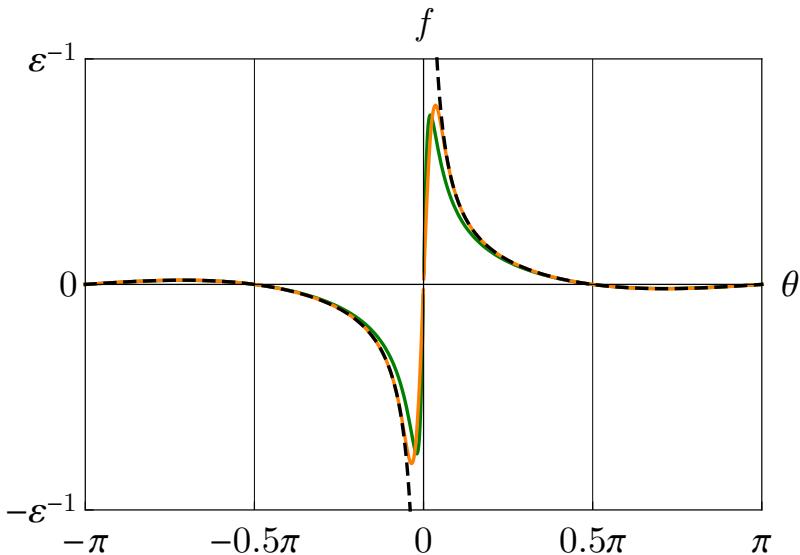


Рисунок 30 — Амплитуда рассеяния в дальнем поле: выражение (i) (3.76) при $\Gamma = 1$ (чёрный пунктир); решение (3.75) при $\Gamma = \exp(-\varepsilon^2 r^2)$, $\varepsilon = 0.05$ (оранжевая сплошная); решение (3.77) при $\Gamma = \exp(-\varepsilon r)$, $\varepsilon = 0.05$ (зелёная сплошная)

3.3.5 Асимптотическое решение в области геометрической акустики

Рассеянное поле в области геометрической акустики включает как компоненту «излучения», так и компоненту «искажения», которые были определены в разделе 3.1:

$$\mathbf{U}_{11} = \mathbf{U}_{11}^r + \mathbf{U}_{11}^d, \quad (3.81)$$

в то время как в дальнем поле — только компоненту «излучения». Ниже будут использоваться формулы для амплитуды и фазы (3.25) однородной плоской падающей волны (3.56):

$$A_0 = 1, \quad \varphi_0 = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}, \quad (3.82)$$

и для изменения амплитуды и сдвига фазы (3.26) вследствие рассеяния

$$A_1 = |\rho_{11}| \cos(\arg \rho_{11} - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}), \quad \varphi_1 = |\rho_{11}| \sin(\arg \rho_{11} - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}). \quad (3.83)$$

Компонента «излучения» имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_{11}^r &\sim -\pi i e^{ir(1-\theta^2/2)} \frac{\theta}{2} \cos \theta \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \left[\operatorname{sgn}(\theta) - \operatorname{erf} \left(\frac{e^{-i\pi/4} \sqrt{r}\theta}{\sqrt{2}} \right) \right], \\ \mathbf{v}_{11}^r &\sim \hat{\mathbf{r}} \rho_{11}^r. \end{aligned} \quad (3.84)$$

В пределах узкой параболической области на малых углах она описывает незатухающее поле:

$$|\boldsymbol{U}_{11}^r| = O(1) \quad \text{при} \quad \sqrt{r}\theta = O(1). \quad (3.85)$$

На больших углах (3.84), как и решение в дальнем поле (3.75), имеет вид уходящей цилиндрической волны и срашивается с выражением (i):

$$\rho_{11}^r \sim \frac{e^{ir-i\pi/4}}{\sqrt{r}} f_0(\theta) \quad \text{при} \quad \sqrt{r}\theta \rightarrow \infty. \quad (3.86)$$

Характерные угловые масштабы решений (3.75) и (3.84) различны; каждый из них при экстраполяции в оставшуюся из двух областей будет более тонким по сравнению с местным характерным масштабом (см. рисунок 32).

Компонента «искажения» имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_{11}^d &\sim -ie^{i\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}} \int_{-\hat{\mathbf{k}}\infty}^r \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_{10}(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{k}} \cdot d\mathbf{r}' = \\ &= \pi ie^{ix} \left[2T\left(\sqrt{2}\varepsilon y, x/y\right) + \frac{1}{2} (\operatorname{sgn}(y) - \operatorname{erf}(\varepsilon y)) \right], \\ \mathbf{v}_{11}^d &\sim \hat{\mathbf{k}} \rho_{11}^d, \end{aligned} \quad (3.87)$$

где T -функция Оуэна определяется формулой (A.5). Она имеет вид неоднородной плоской волны, не интерферирующей с падающей волной (3.56):

$$A_1^d = 0, \quad \varphi_1^d = \operatorname{sgn}(y)|\rho_{11}^d|, \quad (3.88)$$

как следует из (3.83). В альтернативной терминологии (3.32), (3.34), рассеянная волна соответствует (3.84), падающая волна — (3.56) + M_λ (3.87). Последняя представляет собой неоднородную плоскую волну; решение может быть переписано с использованием (3.82) как

$$\rho_{01} + M_\lambda \rho_{11}^d \sim \exp[i(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} + M_\lambda \varphi_1^d(\mathbf{r}))]. \quad (3.89)$$

По сравнению с (3.56) волновой фронт (3.89) будет запаздывать в полуплоскости $y > 0$, где звук распространяется вверх по потоку, и опережать при $y < 0$, где вниз (рисунок 31). Согласно интегральному выражению в (3.87), сдвиг фазы (3.88) пропорционален циркуляции скорости вихря вдоль прямой, начинаящейся в бесконечности со стороны падения волны. Искажение волнового фронта будет проявляться в пределах области течения и в следе за ней:

$$|\boldsymbol{U}_{11}^d| = O(1) \quad \text{при} \quad \varepsilon r \theta = O(1), \quad (3.90)$$

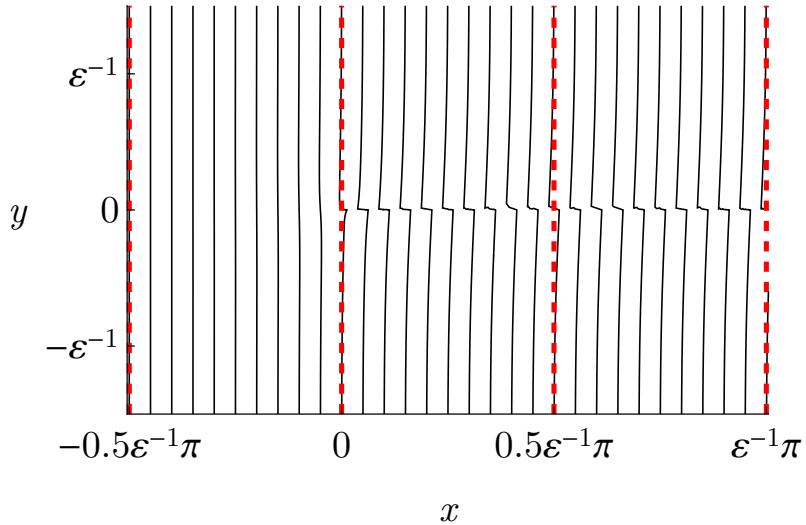


Рисунок 31 — Линии фронта падающей волны согласно определению (3.56) $x = -10\pi; 0; 10\pi; 20\pi$ (красные пунктиры) и определению (3.89) $x + M_\lambda \varphi_1^d = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (чёрные сплошные) в области геометрической акустики $\varepsilon^2 r \rightarrow 0$ при
 $\Gamma = \exp(-\varepsilon^2 r^2)$, $\varepsilon = 0.05$, $M_\lambda = 0.25$

и экспоненциально затухать за пределами области течения и следа. В области покоящегося газа, в которой циркуляция $\Gamma \rightarrow 0$, из (3.87) имеем

$$\rho_{11}^d \sim \pi i e^{ix} \mathcal{H}(x) [\operatorname{sgn}(y) - \operatorname{erf}(\varepsilon y)] \quad \text{при } \varepsilon r \rightarrow \infty, \quad (3.91)$$

где $\mathcal{H}(x)$ — функция Хевисайда, равная 1 в переднем и 0 в заднем направлении. В области $\varepsilon y \rightarrow 0$, в том числе в области потенциального течения $\varepsilon r \rightarrow 0$, где циркуляция $\Gamma \rightarrow 1$,

$$\rho_{11}^d \sim \pi i e^{ir \cos \theta} [\operatorname{sgn}(\theta) - \theta/\pi] \quad \text{при } \varepsilon y \rightarrow 0. \quad (3.92)$$

Согласно (3.92), деформация волнового фронта вследствие переноса полем скорости вихря, затухающим пропорционально r^{-1} при $r \rightarrow \infty$, конечна; причина в том, что продольная компонента скорости затухает при $x \rightarrow \infty$ быстрее — пропорционально x^{-2} .

Итого, рассеянное поле (3.84) + (3.87) за пределами области течения и следа имеет вид уходящей цилиндрической волны и срашивается с выражением (i):

$$\rho_{11} \sim \frac{e^{ir - i\pi/4}}{\sqrt{r}} f_0(\theta), \quad \mathbf{v}_{11} \sim \hat{\mathbf{r}} \rho_{11} \quad \text{при } \varepsilon r \theta \rightarrow \infty. \quad (3.93)$$

Это подтверждает вывод из раздела 3.3.3 о том, что данная область фактически относится к дальнему полю. Поскольку след (3.87) намного шире, чем

параболическая область в (3.84) (см. рисунок 32), в промежуточной области доминирует компонента «искажения»

$$\rho_{11} \sim \rho_{11}^d, \quad \mathbf{v}_{11} \sim \hat{\mathbf{k}}\rho_{11} \quad \text{при } \varepsilon r \theta = O(1). \quad (3.94)$$

При этом вклад в интерференционную картину вносит только компонента «излучения», так что

$$|\mathbf{U}_{11}| = O(1), \quad |A_1| = O(1/\sqrt{r}) \quad \text{при } \varepsilon r \theta = O(1). \quad (3.95)$$

В пределах параболической области

$$|\mathbf{U}_{11}| = O(1), \quad |A_1| = O(1) \quad \text{при } \sqrt{r}\theta = O(1). \quad (3.96)$$

Разрыв при $\theta = 0$, присутствующий (3.84) и в (3.87), исчезает в их сумме.

Решение (3.84) + (3.92) представляет собой в точности незатухающее выражение (ii) для случая ПВТВ с $\Gamma = 1$, эквивалентное следующим выражениям: (23) из работы [19]; (5.7), (5.12) из [20]; (12), (20) из [21]; (24), (34) из [22]; (22), (23) из [29]; (A5), (A9) [33] (некоторые из данных решений выписаны для других величин; некоторые содержат опечатки). Оно не затухает ни в какой области. (Отметим, что рассеянное поле в терминологии (3.34) не затухает только в пределах параболической области $\sqrt{r}\theta = O(1)$.) Оно пригодно в области потенциального течения $\varepsilon r \rightarrow 0$, в которой $\Gamma \rightarrow 1$. Более того, оно остаётся справедливым в области $\varepsilon^2 x \rightarrow 0$, $\varepsilon y \rightarrow 0$ (как в заднем, так и в переднем направлении), т. е. рассеянная волна не чувствует затухания поля скоростей вихря. Независимость решения от ε является признаком области геометрической акустики: в этом случае длина волны остаётся единственным характерным масштабом, и стремление её к нулю не меняет картину.

3.3.6 Асимптотическое решение в ближнем поле

Решение в ближнем поле на больших углах имеет вид уходящей цилиндрической волны и срашивается с выражением (i), что согласуется с решениями, приведёнными выше:

$$\rho_{11} \sim \frac{e^{ir - i\pi/4}}{\sqrt{r}} f_0(\theta) \quad \text{при } \varepsilon^2 r = O(1), \quad \theta/\varepsilon \rightarrow \infty. \quad (3.97)$$

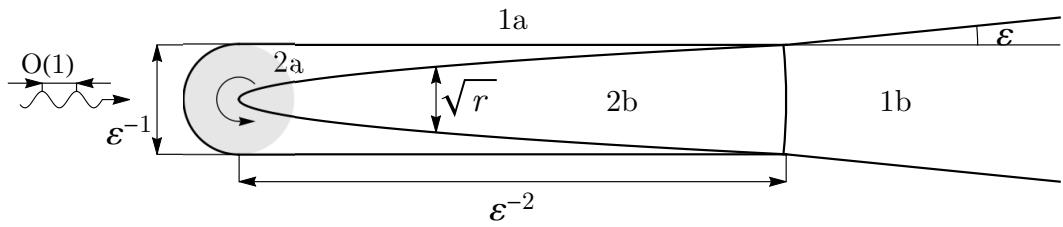


Рисунок 32 — Асимптотические области источника (закрашенный круг) и решения при $\epsilon \rightarrow 0$ с точки зрения порядков величин в соответствии с таблицей

1

Как показано в разделе 3.3.3, ближнее поле $\epsilon^2 r = O(1)$ на малых углах $\theta/\epsilon = O(1)$ будет основной характерной областью задачи. Здесь происходит перестройка решения, от (3.84) + (3.87) в области геометрической акустики до качественно отличного (3.68), (3.75), (3.76) в дальнем поле. Решение в ближнем поле удалось получить только в виде интеграла по одной переменной (A.4)–(A.10). Порядок амплитуды рассеянной волны, очевидно,

$$|\mathbf{U}_{11}| = O(1) \quad \text{при} \quad \epsilon^2 r = O(1), \quad \theta/\epsilon = O(1). \quad (3.98)$$

3.3.7 Численное решение

Оценки, выполненные в разделах 3.3.4 и 3.3.5, определяют четыре асимптотических области с различными порядками величин $|\mathbf{U}_{11}|$, $|A_1|$, которые можно классифицировать по двум независимым критериям (рисунок 32, таблица 1). В этом смысле область геометрической акустики является частью ближнего поля. Дальнее и ближнее поля являются в точности такими, как предсказывает анализ представления решения через преобразование Фурье в разделе 3.3.3 (ср. с рисунком 29). Кроме того, дальнее и ближнее поля в точности совпадают с областями, в которых амплитуда рассеянной волны $|\mathbf{U}_{11}| \ll 1$ и $|\mathbf{U}_{11}| = O(1)$, соответственно. Отметим, что $\max |\mathbf{U}_{11}| = O(1)$, так что борновское приближение, как и требовалось, остаётся равномерно пригодным.

Полученное решение сводится к выражениям (i), (ii) и аналогу решения из работы [36] в различных областях (таблица 2). Выражение (i) — уходящая волна с особенностью (3.68), (3.76) — содержится в области 1а. Выражение (ii) — незатухающая сумма компоненты «излучения» (3.84) и компоненты «искажения» (3.92) — во внутренней части ближнего поля $2a \cup 2b$ (в области геометрической

Таблица 1 — Порядки $|\mathbf{U}_{11}|$, $|A_1|$, $|f|$ в асимптотических областях, показанных на рисунке 32

	$\sqrt{r} A_1 = O(1)$	$\sqrt{r} A_1 \gg 1$
дальнее поле:	1a	1b
$ \mathbf{U}_{11} \ll 1$	$ \mathbf{U}_{11} = O(1/\sqrt{r})$	$ \mathbf{U}_{11} = O(\varepsilon^{-1}/\sqrt{r})$
	$ A_1 = O(1/\sqrt{r})$	$ A_1 = O(\varepsilon^{-1}/\sqrt{r})$
	$ f = O(1)$	$ f = O(\varepsilon^{-1})$
ближнее поле:	2a	2b
$ \mathbf{U}_{11} = O(1)$	$ \mathbf{U}_{11} = O(1)$	$ \mathbf{U}_{11} = O(1)$
	$ A_1 = O(1/\sqrt{r})$	$ A_1 = O(1)$
	$ f = O(\sqrt{r})$	$ f = O(\sqrt{r})$

акустики). Аналог решения из работы [36] — уходящая волна без особенности (3.68), (3.75), (3.76) — в дальнем поле 1a \cup 1b.

Действительная часть решения, полученного численным интегрированием (A.4)–(A.10) при $\varepsilon = 0.05$, представлена на рисунке 33 (ср. со схемами на рисунках 29, 32). Сходное поведение, при котором порядок амплитуды рассеянного поля сохраняется в пределах ограниченной области $\varepsilon^2 r = O(1)$ и затухает при $\varepsilon^2 r \rightarrow \infty$, может наблюдаться в физическом эксперименте, если вихрь с постоянной циркуляцией имеется в ограниченной области. Примером, по-видимому, является картина волн на поверхности воды, соответствующая случаю $M_\lambda \approx 0.2$ на рисунке 2а из работы [92].

Для визуализации решения в ближнем поле в виде диаграммы направленности обобщим амплитуду рассеяния на комплекснозначную функцию, зависящую от r :

$$\rho_{11} \equiv \frac{e^{ir - i\pi/4}}{\sqrt{r}} f(\mathbf{r}). \quad (3.99)$$

Диаграммы рассеяния $|f(r, \theta)|$ на различных расстояниях $r = \text{const}$ в пределах покоящегося газа $\varepsilon r \gg 1$ при $\varepsilon = 0.05$ представлены на рисунках 34–36. Показаны решение в главном приближении при $\varepsilon \rightarrow 0$, найденное в разделах 3.3.4 и 3.3.5, и численное решение, полученное из точного представления (A.4)–(A.10). Поскольку $f(r, -\theta) = -f(r, \theta)$, показана только верхняя полу平面 $0 \leq \theta \leq \pi$. Видны максимумы на малых углах и нули в переднем

Таблица 2 — Известные ранее выражения, которые включены в решение данной задачи в разных асимптотических областях (см. рисунок 32)

	Выражение (i)	Выражение (ii)
Формулы	(3.68), (3.110), (3.76)	(3.84) + (3.92)
Свойства:		
регулярность	—	+
затухание на ∞	+	—
Случай	$\Gamma = 1$	$\Gamma = 1$
Корректность постановки задачи	некорректна	некорректна
Впервые получено:		
точно	[11]	[19]
аналогичное	—	[29]
		область геом. акустики
Соответствующая область	далнее поле, большие углы 1a	(ближнее поле $2a \cup 2b$, «внутренняя» часть)
Решение из работы [36]		
Формулы	(3.68), (3.77), (3.76)	
Свойства:		
регулярность	+	
затухание на ∞	+	
Случай		$\Gamma = \exp(-\varepsilon r)$
Корректность постановки задачи		корректна
Впервые получено:		
точно	—	
аналогичное		[36]
Соответствующая область		далнее поле 1a \cup 1b

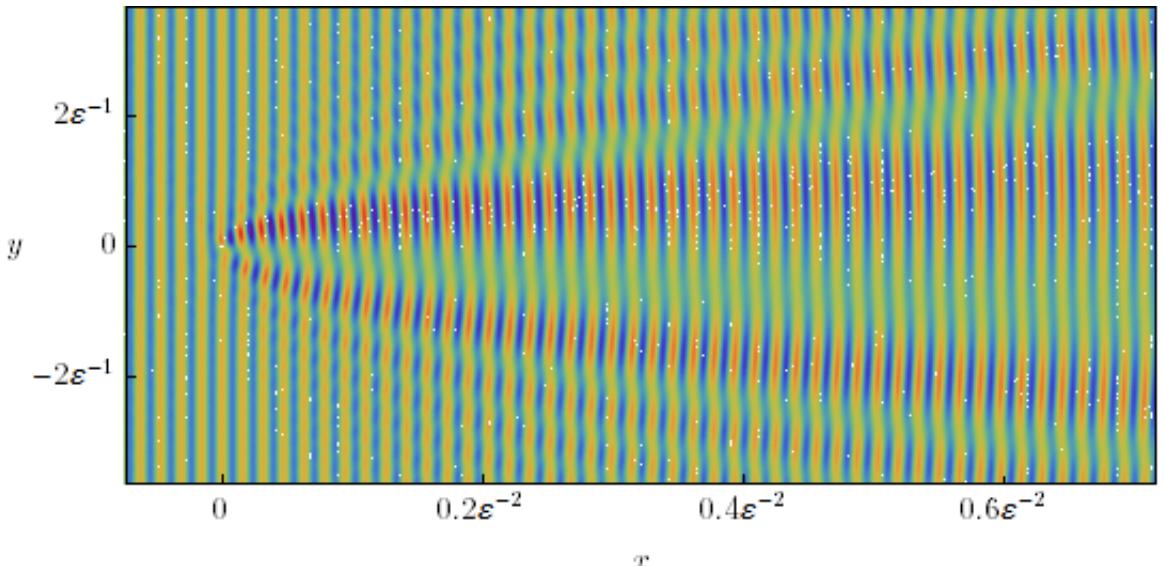


Рисунок 33 — Численное решение $\text{Real}(\rho_{11})$ при $\Gamma(r) = \exp(-\varepsilon^2 r^2)$, $\varepsilon = 0.05$.
Показан диапазон значений $-2.63 < \text{Real}(\rho_{11}) < 2.63$

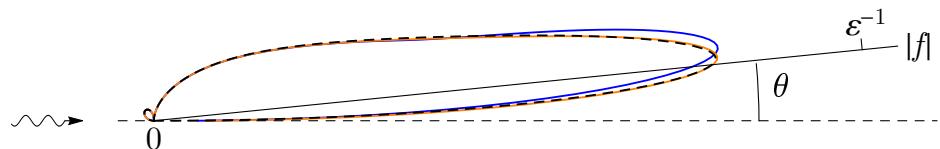


Рисунок 34 — Диаграммы рассеяния в дальнем поле при $\Gamma = \exp(-\varepsilon^2 r^2)$, $\varepsilon = 0.05$: решение в главном приближении при $\varepsilon^2 r \rightarrow \infty$ (3.75) (чёрный пунктир) и численное решение при $\varepsilon^2 r = 0.5$ (синяя сплошная), $\varepsilon^2 r = 1$ (оранжевая сплошная)

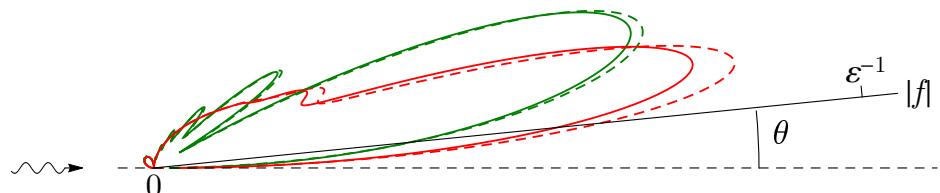


Рисунок 35 — Диаграммы рассеяния в области геометрической акустики при $\Gamma = \exp(-\varepsilon^2 r^2)$, $\varepsilon = 0.05$: решение в главном приближении при $\varepsilon r \rightarrow \infty$, $\varepsilon^2 r \rightarrow 0$ соответствующее (3.84) + (3.91) (пунктиры) и численное решение при $\varepsilon r = 2$, $\varepsilon^2 r = 0.1$ (зелёные), $\varepsilon r = 4$, $\varepsilon^2 r = 0.2$ (красные)

$\theta = 0$, боковом $\theta = \pi/2$ и заднем $\theta = \pi$ направлениях. Рисунки 36а, 36в показывают, что на практике область $r < 0.2\varepsilon^{-2}$ можно рассматривать как область геометрической акустики, а область $r > 0.5\varepsilon^{-2}$ — как дальнее поле. Осцилляции в области геометрической акустики (рисунок 35) отражают интерференцию компонент «излучения» (3.84) и «искажения» (3.87).

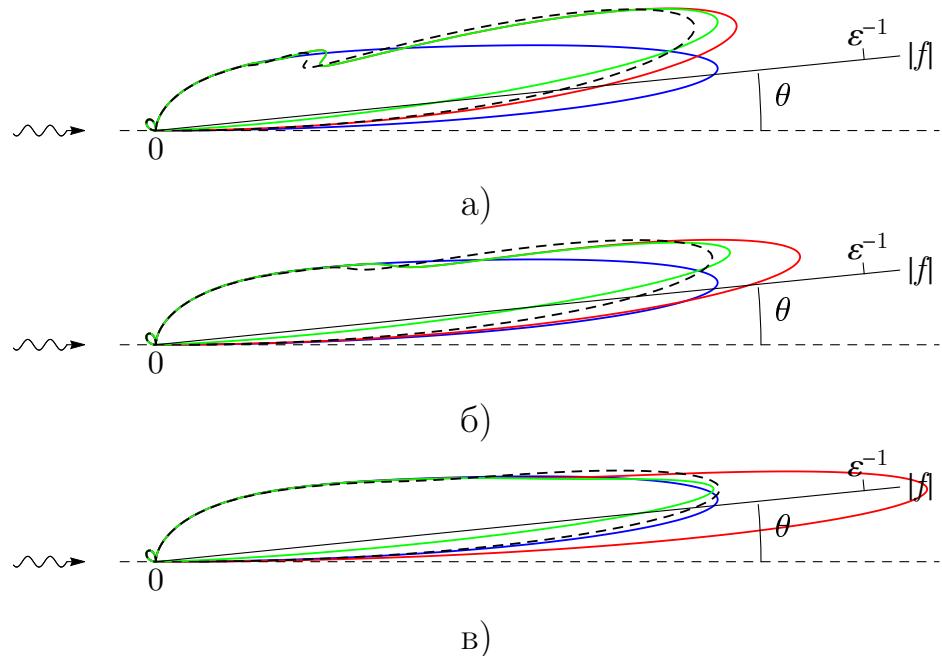


Рисунок 36 — Диаграммы рассеяния при $\Gamma = \exp(-\varepsilon^2 r^2)$, $\varepsilon = 0.05$: решение в главном приближении в дальнем поле (3.75) (синие сплошные), решение в главном приближении в области геометрической акустики соответствующее (3.84) + (3.91) (красные сплошные), композитное решение соответствующее (3.100) (светло-зелёные сплошные) и численное решение (чёрные пунктиры):

$$\text{а} - \varepsilon^2 r = 0.2, \text{ б} - \varepsilon^2 r = 0.3, \text{ в} - \varepsilon^2 r = 0.5$$

Структура полученного решения позволяет составить выражение, равномерно пригодное в дальнем поле $\varepsilon^2 r \rightarrow \infty$, на больших углах $\theta/\varepsilon \rightarrow \infty$ и в области геометрической акустики $\varepsilon^2 r \rightarrow 0$. Для этого используем аналог метода мультипликативного составления, который используется для построения равномерно пригодного решения из сращиваемых асимптотических разложений взятием произведения внешнего и внутреннего разложений, делённого на промежуточную асимптотику [106]. Возьмём решение в дальнем поле (3.68), (3.75), (3.76) в качестве внешнего разложения, решение в области геометрической акустики (3.84) + (3.87) в качестве внутреннего и решение на больших углах (3.97), (3.76) в качестве промежуточной асимптотики. Это возможно, поскольку в области 1а все три разложения срашиваются. Композитное решение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{11}|_{\varepsilon^2 r \rightarrow \infty} \rho_{11}|_{\varepsilon^2 r \rightarrow 0}}{\rho_{11}|_{\theta/\varepsilon \rightarrow \infty}} &\sim \pi i \left(1 - e^{-\theta^2/4\varepsilon^2}\right) \left\{ e^{ir \cos \theta} \left[2T \left(\sqrt{2}\varepsilon r \sin \theta, \operatorname{ctg} \theta\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (\operatorname{sgn}(\theta) - \operatorname{erf}(\varepsilon r \sin \theta)) \right] - \right. \\ &\quad \left. - e^{ir(1-\theta^2/2)} \frac{\theta}{2} \cos \theta \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \left[\operatorname{sgn}(\theta) - \operatorname{erf} \left(\frac{e^{-i\pi/4} \sqrt{r} \theta}{\sqrt{2}} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.100)$$

Выражение (3.100) наиболее близко к численному решению, в том числе в ближнем поле (рисунок 36б). Помимо ближнего поля, единственная область, в которой оно даёт относительную ошибку $O(1)$, — это не представляющая интереса окрестность оси симметрии, где $\rho_{11} \propto \theta$, в то время как выражение (3.100) пропорционально θ^3 .

3.3.8 Сечение рассеяния

Обобщим полное сечение рассеяния и сечение переноса импульса [11] с учётом направления распространения рассеянной волны. В безразмерных переменных

$$\sigma(r) = \int_{-\pi}^{\pi} |\mathbf{v}_{11}|^2 \hat{\mathbf{v}}_{11} \cdot \mathbf{r} d\theta, \quad \sigma^*(r) = \int_{-\pi}^{\pi} |\mathbf{v}_{11}|^2 (\hat{\mathbf{v}}_{11} - \hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{r} d\theta, \quad (3.101)$$

где $\hat{\mathbf{v}}_{11} = \mathbf{v}_{11}/|\mathbf{v}_{11}|$ — волновой вектор рассеянной волны, $\hat{\mathbf{v}}_{11} \rightarrow \hat{\mathbf{r}}$ при $\varepsilon^2 r \rightarrow \infty$. В области покоящегося газа, где можно пренебречь взаимодействием вихря со звуком, поток энергии рассеянной волны и перенос импульса должны быть постоянны:

$$\sigma(r) \rightarrow \sigma_\infty, \quad \sigma^*(r) \rightarrow \sigma_\infty^* \quad \text{при } \varepsilon r \rightarrow \infty. \quad (3.102)$$

Подстановка решения в дальнем поле вида (3.68) в (3.101) даёт

$$\sigma_\infty = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\theta) d\theta, \quad \sigma_\infty^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\theta)(1 - \cos \theta) d\theta. \quad (3.103)$$

Для решения (3.75) полное сечение рассеяния из (3.103)

$$\sigma_\infty \rightarrow 4\pi \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-\theta^2/4\varepsilon^2})^2}{\theta^2} d\theta = (4 - 2\sqrt{2}) \pi^{3/2} \varepsilon^{-1} \quad (3.104)$$

имеет порядок размера области течения, причём большая часть энергии излучается на малые углы $\theta/\varepsilon = O(1)$. Размерное полное сечение рассеяния имеет порядок $O(M_*^2 \beta^2 \varepsilon^{-1})$ относительно длины волны; условия (3.50) допускают отношение как много больше, так и много меньше единицы.

В области геометрической акустики за пределами области течения подстановка (3.84) + (3.91) в (3.101) даёт:

$$\sigma \rightarrow 2\pi^2 r \int_0^\infty (1 - \operatorname{erf}(\varepsilon r \theta))^2 d\theta = (4 - 2\sqrt{2}) \pi^{3/2} \varepsilon^{-1} \quad \text{при } \varepsilon r \rightarrow \infty, \quad \varepsilon^2 r \rightarrow 0, \quad (3.105)$$

что совпадает со значением в дальнем поле (3.104), несмотря на качественное различные диаграммы рассеяния. Это соответствует требованию условия сохранения потока энергии (3.102). Большая часть энергии относится к компоненте «искажения» (3.91), поскольку её характерный поперечный масштаб намного больше, чем у компоненты «излучения». Таким образом, рассеянное поле, определённое согласно (3.34) как компонента «излучения», нарушает (3.102):

$$\sigma' \rightarrow 2\pi^2 r \int_0^\infty \left[\operatorname{sgn}(\theta) - \operatorname{erf} \left(\frac{e^{-i\pi/4}\sqrt{r}\theta}{\sqrt{2}} \right) \right]^2 d\theta = O(\sqrt{r}) \quad \text{при } \varepsilon r \rightarrow \infty, \quad \varepsilon^2 r \rightarrow 0. \quad (3.106)$$

Поэтому в данной статье мы считаем компоненту «искажения» также частью рассеянного поля несмотря на то, что она не влияет на интерференционную картину.

В области потенциального течения из (3.84) + (3.92) имеем

$$\sigma \sim r \int_{-\pi}^{\pi} |\rho_{11}|^2 \cos \theta d\theta \rightarrow 2\pi^2 r \int_0^\infty (1 - \theta/\pi)^2 \cos \theta d\theta = 4\pi r \quad \text{при } \varepsilon r \rightarrow 0. \quad (3.107)$$

Сечение переноса импульса имеет порядок длины волны и будет одинаковым в дальнем и ближнем поле:

$$\sigma_\infty^* \rightarrow \pi^2/2, \quad (3.108)$$

поскольку компонента «искажения», а также малые углы не вносят вклад. Благодаря этому результат (3.108), полученный в работах [11; 12] для случая ПВТВ на основе выражения (i) и использованный для вычисления взаимной силы трения в сверхтекучем гелии, верен несмотря на некорректность выражения (i).

3.4 Взаимодействие акустических возмущений с вихревой нитью

В разделе 3.3 было показано, что выражения (i), (ii), известные из случая ПВТВ с $\Gamma = 1$, совпадают с решением в главном приближении для случая $\Gamma = \exp(-\varepsilon^2 r^2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в разных областях. В данном разделе объясняется, к чему приводит подстановка $\varepsilon = 0$ и решение соответствующей некорректной задачи методами, корректными только при $\varepsilon > 0$ (что и было проделано в работах, посвящённых случаю ПВТВ).

В вырожденном случае $\varepsilon = 0$ единственный характерный масштаб для источника и, следовательно, для решения есть длина акустической волны $O(1)$. Фурье-образ источника (3.71) при $\Gamma = 1$ имеет особенность на векторе падающей волны $\hat{\mathbf{k}}$:

$$\hat{q}_{11}(\mathbf{K}) = -2i \frac{\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{k}})}{|\mathbf{K} - \hat{\mathbf{k}}|^2}. \quad (3.109)$$

Подстановка (3.109) в представление в дальнем поле (3.68), (3.69) ведёт к выражению (i), определённому формулой (3.76):

$$f = f_0, \quad (3.110)$$

с особенностью на линии, представляющей собой вырожденную область $\theta/\varepsilon = O(1)$:

$$f_0 \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \theta \rightarrow 0, \quad (3.111)$$

Как отмечено в работе [36], сингулярность представляет собой неопределённость $\infty - \infty$ (см. рисунок 30). Выражение (i) удовлетворяет условию излучения (3.38), но не удовлетворяет уравнению Гельмгольца (3.35), правая часть которого всюду будет существенной. В действительности представление в дальнем поле теряет силу, поскольку дальнюю асимптотику (3.41) функции Грина нельзя использовать в области течения [19]: вклад источников в окрестности $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = O(1)$ учитывается с ошибкой, из-за чего теряется свойство функции Грина быть фундаментальным решением уравнения. (В общем случае, Фурье-образ источника (3.71) и, следовательно, амплитуда рассеяния (3.69), не имеет особенностей $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{k}}$ при условии $|\mathbf{v}_{10}| = O(r^{-n})$, $n > 2$ при $r/R \rightarrow \infty$, которое является более строгим по сравнению с условием (3.44) корректности постановки задачи рассеяния в случае однородной плоской падающей волны (3.56). Это наводит на мысль, что в случае поля скорости вихря $|\mathbf{v}_{10}| \propto r^{-n}$ при $3/2 < n \leq 2$ также нельзя использовать дальнюю асимптотику (3.41) функции Грина, т. е. всё пространство необходимо рассматривать как область течения.)

Подстановка (3.109) в точное представление решения (3.65) с (3.66) ведёт к незатухающему выражению (ii), определённому формулой (3.84) + (3.92):

$$|\mathbf{U}_{11}| = O(1) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.112)$$

В главном приближении выражение (ii) удовлетворяет уравнению Гельмгольца (3.35), но не удовлетворяет условию излучения (3.38), даже если относить к

рассеянной волне только компоненту «излучения» (3.84). В действительности, точное представление (3.65) теряет силу, поскольку выражение (ii) не удовлетворяет условию затухания (3.39) и, следовательно, уравнению (3.63). Другие авторы выражения (ii) использовали другие представления, которые также не удовлетворяли условию излучения (3.38).

Итого, ни представление в дальнем поле (3.68), (3.69), ни точное представление (3.65) неприменимо в случае ПВТВ и ни одно из выражений (i), (ii) не удовлетворяет (3.35), (3.38). Тем не менее, выражение (ii) имеет то преимущество, что оно соответствует существующей области геометрической акустики, в то время как выражение (i) — дальнему полю, которое, как и вся область покоящегося газа, отсутствует.

3.5 Взаимодействие акустических возмущений с вихревой парой вблизи твёрдой поверхности

3.5.1 Постановка задачи

Пусть в двумерном пространстве имеются твёрдая поверхность $y = 0$ и два точечных вихря с координатами $x = \pm l$, $y = h$ и циркуляциями $\pm \Gamma_0$. Такая конфигурация соответствует начальному условию задачи, рассмотренной в главе 1. Твёрдая поверхность гармонически колеблется в направлении оси y ; при этом излучается монохроматическая плоская акустическая волна длиной $2\pi/k$. Требуется определить периодическое по времени рассеянное акустическое поле, возникающее в результате взаимодействия падающей акустической волны с течением.

Как и в задаче о рассеянии звука цилиндрическим вихрем, рассмотренной в разделе 3.3, будем считать характерные числа Маха (на масштабах длины волны и расстояния между вихрями) малыми и пренебрегать влиянием вязкости. Последнее предположение качественно отличает постановку задач в данной главе от постановок в главах 1 и 2. При малых числах Маха характерное время перемещения вихрей на масштаб длины волны $l\lambda/\Gamma_0$ намного больше времени прохождения волной расстояния до вихрей h/c_∞ . Поэтому вихри можно счи-

тать неподвижными. Решение для возмущений плотности ρ_{11} удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца (3.35), (3.36). При этом в (3.36) поле возмущений скорости в падающей волне имеет вид (3.56), а

$$\mathbf{v}_{10} = \sum_{i=1}^4 \frac{\Gamma_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \hat{\boldsymbol{\theta}}_i \quad (3.113)$$

— поле скорости, индуцированное парой вихрей и их отражениями относительно твёрдой поверхности $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} = 0$:

$$\Gamma_1 = \Gamma_3 = \Gamma_0, \quad \Gamma_2 = \Gamma_4 = -\Gamma_0, \quad (3.114)$$

$$\mathbf{r}_1 = -l\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{k}} + h\hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{r}_2 = l\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{k}} + h\hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{r}_3 = l\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{k}} - h\hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{r}_4 = -l\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{k}} - h\hat{\mathbf{k}}, \quad (3.115)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_i = \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}, \quad (3.116)$$

где $\hat{\mathbf{z}}$ — единичный вектор вдоль вектора завихренности. Поле скорости (3.113)–(3.116) удовлетворяет условию непротекания $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_{10} = 0$. Источниковый член (3.36) с учётом (3.56) переписывается в виде

$$q_{11} = -2i\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla(\mathbf{v}_{10} \cdot \mathbf{v}_{01}) = -2i\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_{10} e^{i\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}}). \quad (3.117)$$

Решение уравнения (3.35) с достаточно быстро затухающим источником (3.117) должно удовлетворять граничному условию излучения Зоммерфельда (3.38) при $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}/r_F \rightarrow +\infty$, где r_F — некоторый масштаб, и условию непротекания на твёрдой поверхности

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_{11} = 0 \quad \text{при} \quad \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} = 0. \quad (3.118)$$

С учётом (3.37) условие (3.118) для полей скорости (3.56), (3.113)–(3.116) переписывается в виде

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \rho_{11} = 0 \quad \text{при} \quad \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} = 0. \quad (3.119)$$

Не считая граничного условия непротекания, к постановке задачи применимы соображения, перечисленные в разделах 3.1 и 3.2.

3.5.2 Представление решения

Сведём задачу (3.35), (3.117), (3.38) при $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}/r_F \rightarrow +\infty$, (3.119) к задаче рассеяния в неограниченном пространстве, в которой условие (3.38) ставится

при $r/r_F \rightarrow \infty$. Для этого необходимо продолжить источниковый член (3.117) на нижнюю полуплоскость так, чтобы условие (3.119) выполнялось тождественно.

Точное решение задачи рассеяния в неограниченном пространстве выражается через свёртку функции Грина с источниковым членом

$$\rho_{11} = \int_{\mathbb{R}^2} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') q_{11}(\mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}', \quad (3.120)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (3.121)$$

где $H_0^{(1)}(r)$ — функция Ганкеля 1-го рода. Необходимо выбрать такое распределение источника, чтобы функция $Q \equiv \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla q_{11}$ была антисимметричной относительно твёрдой поверхности $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} = 0$:

$$Q(\mathbf{r}) = -Q(\mathbf{r} - 2(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r})\hat{\mathbf{k}}). \quad (3.122)$$

Условию (3.122) удовлетворяет распределение

$$q_{11} = -2i\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_{10} e^{i|\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}|}), \quad (3.123)$$

симметричное относительно твёрдой поверхности.

Решение задачи (3.35), (3.123) с граничным условием (3.38) при $r/r_F \rightarrow \infty$ в полуплоскости $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} > 0$ имеет вид (3.120), (3.121) и совпадает с решением исходной задачи (3.35), (3.117), (3.38) при $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}/r_F \rightarrow +\infty$, (3.119).

Эквивалентная формулировка состоит в интегрировании (3.120) по реальной полуплоскости $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} > 0$ с функцией Грина

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{i}{4} \left[H_0^{(1)}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) + H_0^{(1)}(|\mathbf{r} - (\mathbf{r}' - 2(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}')\hat{\mathbf{k}})|) \right]. \quad (3.124)$$

3.5.3 Асимптотическое решение в дальнем поле

Решение в дальнем поле $r/r_F \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\rho_{11} \sim \frac{e^{ir-i\pi/4}}{\sqrt{r}} f(\theta) \quad \text{при} \quad r/r_F \rightarrow \infty, \quad (3.125)$$

где амплитуда рассеяния

$$f = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{q}_{11}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (3.126)$$

где

$$\hat{q}_{11}(\mathbf{K}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} q_{11}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} d^2\mathbf{r}. \quad (3.127)$$

Подстановка (3.123) в (3.127) и интегрирование по частям даёт

$$\hat{q}_{11} = \frac{1}{\pi} \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{K} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_{10} e^{i|\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}|} e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} d^2\mathbf{r}. \quad (3.128)$$

Вычислим (3.128) с помощью теоремы о свёртке и выражений

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_{10} e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} d^2\mathbf{r} = -i \frac{\hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{k}})}{K^2} (e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}_1} - e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}_2} + e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}_3} - e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}_4}), \quad (3.129)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i|\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}|} e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} d^2\mathbf{r} = \frac{2i\delta(K_y)}{1 - K_x^2}, \quad (3.130)$$

где $K_x = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{K}$, $K_y = \hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{k}})$. Теорема о свёртке даёт

$$\hat{q}_{11} = \frac{4i}{\pi} \kappa K_y \sin(lK_y) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dK'_x}{1 - (K_x - K'_x)^2} \frac{1}{K'^2_x + K_y^2} (e^{ihK'_x} - e^{-ihK'_x}). \quad (3.131)$$

Для вычисления несобственного интеграла (3.131) введём комплексную плоскость K'_x . Будем обходить полюса $K'_x = K_x - 1$ и $K'_x = K_x + 1$ соответственно по и против часовой стрелки: такое правило обхода позволит получить прообраз выражения (3.130) взятием обратного преобразования Фурье. Для применения теоремы о вычетах при вычислении первого слагаемого в (3.131) контур интегрирования необходимо замыкать в пределах полуплоскости $\text{Imag}(K'_x) > 0$, а при вычислении второго в $\text{Imag}(K'_x) < 0$. Итого получаем

$$\hat{q}_{11} = -4K_x K_y \sin(lK_y) \left(\frac{e^{ih(1+K_x)}}{(K_x + 1)^2 + K_y^2} - \frac{e^{ih(1-K_x)}}{(K_x - 1)^2 + K_y^2} \right) \quad (3.132)$$

или, в векторной форме,

$$\hat{q}_{11} = -4\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{K} \hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{k}}) \sin(l\hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{k}})) \left(\frac{e^{ih(1+\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{K})}}{|\mathbf{K} + \hat{\mathbf{k}}|^2} - \frac{e^{ih(1-\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{K})}}{|\mathbf{K} - \hat{\mathbf{k}}|^2} \right). \quad (3.133)$$

Амплитуда рассеяния (3.126) с учётом (3.133) принимает вид

$$\begin{aligned} f &= i\sqrt{2\pi} \cos \theta \sin \theta \sin(l \sin \theta) \left(\frac{e^{ih(1+\cos \theta)}}{1 + \cos \theta} - \frac{e^{ih(1-\cos \theta)}}{1 - \cos \theta} \right) = \\ &= i\sqrt{2\pi} \cos \theta \sin \theta \sin(l \sin \theta) e^{ih} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} e^{ih \cos \theta} - \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} e^{ih \cos \theta} \right)^{-1} \right), \end{aligned} \quad (3.134)$$

где угол θ отсчитывается от направления $\hat{\mathbf{k}}$. Представим решение (3.135) в форме

$$f = A_f e^{i\varphi_f}. \quad (3.135)$$

Тогда

$$A_f = \sqrt{2\pi} \frac{\cos \theta \sin(l \sin \theta)}{\sin(\theta/2)} \sqrt{\cos^2 \theta \cos^2(h \cos \theta) + \sin^2(h \cos \theta)}, \quad (3.136)$$

$$\varphi_f = \frac{\pi}{2} + h - \arctan \frac{\operatorname{tg}(h \cos \theta)}{\cos \theta}. \quad (3.137)$$

Для непрерывности решения к функции \arctan в (3.137) в точках $h \cos \theta = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ добавляется или отнимается значение π .

Согласно решению (3.135)–(3.137), фаза рассеянной волны $r - \pi/4 + \varphi_f(\theta)$ зависит от угла рассеяния. Это означает, что линии волнового фронта отличаются от окружностей, т. е. рассеянная волна, хотя и удовлетворяет условию излучения (3.38), отлична от цилиндрической. Это качественно отличает решение данной задачи от решений задач рассеяния в пространстве без твёрдых границ [79; 81; 83; 84; 4], в которых акустическая волна движется из бесконечности. В последнем случае вещественная часть источника q_{11} нечётна, а мнимая — чётна; следовательно, амплитуда рассеяния, выражаяющаяся через фурье-образ, является вещественной.

В случае $l \sim h \gg \lambda$, когда расстояние между вихрями и их высота над землёй намного больше длины акустической волны $\lambda = 2\pi/k$, дальнее поле охватывает область $r \gg l^2/\lambda$, так что

$$r_F = l^2/\lambda. \quad (3.138)$$

Амплитуда (3.136) достигает максимума порядка $O(l)$ в направлении распространения падающей волны $\theta = 0$ и имеет число нулей порядка $O(l)$. Диаграмма направленности напоминает интерференционную картину суперпозиции волн от нескольких источников (рисунок 37). Разность фаз (3.137) в различных направлениях на окружности $r = \text{const}$ имеет порядок $O(h)$ (рисунок 38). Отличие волнового фронта от окружности будет $o(h/r_F) = o(\lambda/l)$.

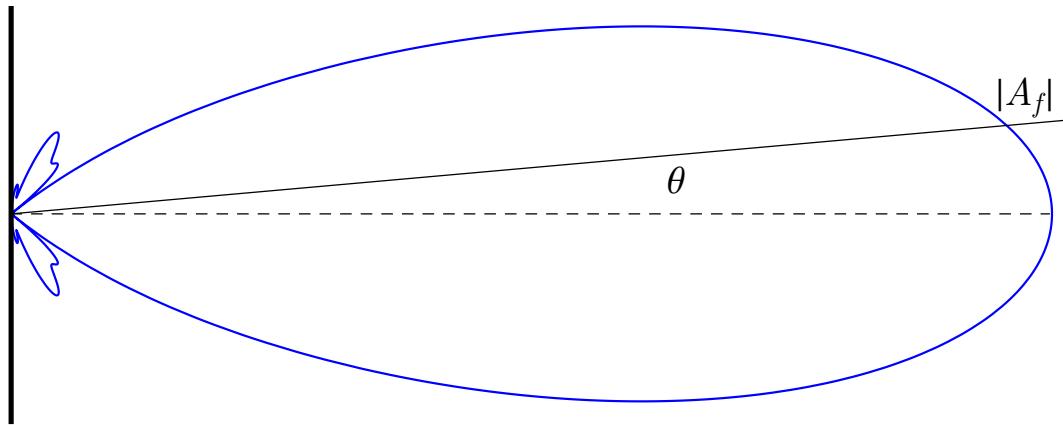


Рисунок 37 — Амплитуда рассеяния, абсолютная величина $|A_f(\theta)|$ (3.136) при $l = 5, h = 10$

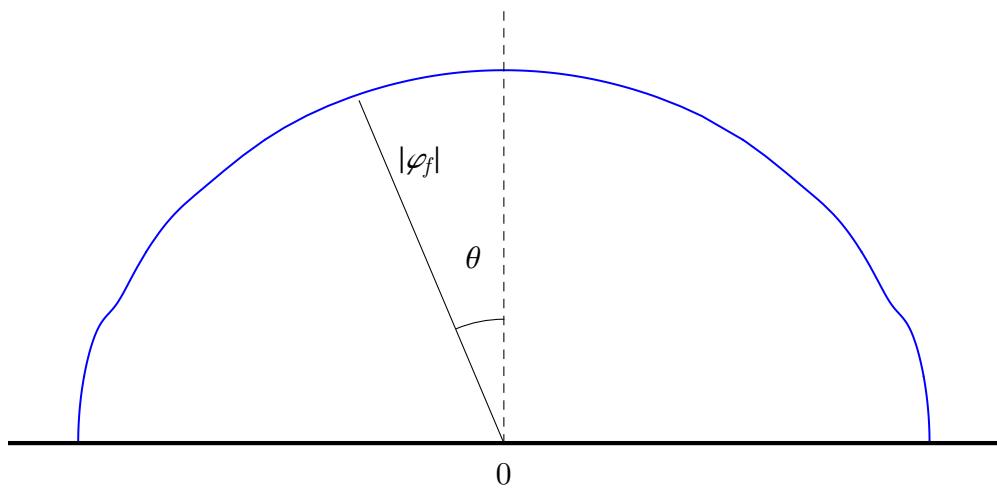


Рисунок 38 — Фаза рассеянной волны $r - \pi/4 + \varphi_f(\theta)$ (3.137) на окружности $r = 50$ при $l = 5, h = 10$

3.6 Выводы по главе 3

Рассмотрены две задачи взаимодействия плоской акустической волны длиной λ с вихревыми течениями из глав 1 и 2.

В первой из задач рассматривается вихрь, порождённый вращением кругового цилиндра в вязкой среде в течение конечного времени. Поле скорости такого вихря пропорционально $r^{-1} \exp(-r^2/L^2)$ и близко к полю скорости вихревой нити в области $r \ll L$. Получено решение вида уходящей на бесконечность цилиндрической волны в дальнем поле $r \gg L^2/\lambda$ без особенностей. Асимптотическая структура рассеянной волны в случае $\lambda \ll L$ аналогична структуре решения в задаче о дифракции плоской волны на щели шириной L . Решение в дальнем поле имеет максимум интенсивности на углах $\theta = O(\lambda/L)$ и близко к

решению Л. П. Питаевского с особенностью [11] при $\theta \gg \lambda/L$. В области геометрической акустики, в том числе в области потенциального течения $r \ll L$, решение близко к незатухающему решению П. В. Сакова [19].

Во второй задаче рассматривается вихревая пара вблизи бесконечной плоской твёрдой поверхности, и акустическая волна генерируется источниками, расположенными на поверхности. Получено решение вида уходящей на бесконечность рассеянной волны, отличной от цилиндрической. Максимум интенсивности наблюдается в направлении, перпендикулярном плоскости.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Получено численное решение двумерной задачи об эволюции в вязкой несжимаемой жидкости двух вихрей с противоположными циркуляциями вблизи бесконечной прямолинейной твёрдой поверхности. Описан механизм глобального нестационарного отрыва пограничного слоя. Рассчитаны модификация траекторий движения вихрей и уменьшение со временем их циркуляции под влиянием отрыва.
2. Впервые на основе асимптотического анализа уравнений Навье–Стокса определены характеристики цилиндрического вихря, возникающего при вращении кругового цилиндра в вязкой среде, для случая сжимаемого газа с линейной зависимостью коэффициентов диффузии от температуры. Найдены условия, при которых циркуляция скорости будет на больших расстояниях от цилиндра выше, чем в случае несжимаемой жидкости, и в некоторой промежуточной области — выше, чем на поверхности цилиндра.
3. Впервые рассмотрена задача взаимодействия цилиндрического вихря, возникающего при вращении кругового цилиндра в вязкой среде, с плоской акустической волной. Построено асимптотическое решение для случая, когда характерный масштаб области течения велик по сравнению с длиной волны. Два известных решения для случая вихревой нити, решение Л. П. Питаевского и решение П. В. Сакова, содержатся в качестве предельных случаев в двух различных асимптотических областях. Получено решение в дальнем поле задачи взаимодействия плоской акустической волны и двух вихрей с противоположными циркуляциями вблизи бесконечной прямолинейной твёрдой поверхности. Рассеянная волна имеет вид уходящей на бесконечность волны, отличной от цилиндрической.

В заключение автор выражает признательность научному руководителю Гайфуллину А. М. за постановку задач, поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство. Также автор благодарит коллектив отдела №4 НИО-2 ЦАГИ за поддержку и помощь и авторов шаблона *Russian-Phd-

LaTeX-Dissertation-Template* за помощь в оформлении диссертации. Научное исследование проведено при поддержке РФФИ, грант 19-31-90057.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Gaifullin A. M., Gadzhiev D. A.* Evolution of vortex wake near the Earth's surface // AIP Conference Proceedings. — 2016. — Vol. 1170. — P. 020019.
2. Гаджисеев Д. А., Гайфуллин А. М. Эволюция двух вихрей вблизи твердой поверхности // Прикладная механика и техническая физика. — 2018. — Т. 59, № 2. — С. 31—38.
3. *Gadzhiev D. A., Gaifullin A. M.* Structure of laminar unsteady boundary layer separation under an airplane wake vortex interaction with a ground surface // AIP Conference Proceedings. — 2018. — Vol. 2027. — P. 030125.
4. *Gadzhiev D. A., Gaifullin A. M.* Sound scattering by a vortex: case of exponentially decaying velocity // Journal of Fluid Mechanics. — 2021. — Vol. 918. — A46.
5. *Gadzhiev D. A., Gaifullin A. M.* Waves propagation through a localized axisymmetric vortical flow // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — Vol. 1959. — P. 012020.
6. *Gaifullin A. M., Gadzhiev D. A., Zubtsov A. V.* Vortices appearance and diffusion // Journal of Physics: Conference Series. — 2017. — Vol. 894. — P. 012017.
7. Vortical structures interaction / A. M. Gaifullin [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. — 2019. — Vol. 1268. — P. 012016.
8. *Gadzhiev D. A., Gaifullin A. M., Zubtsov A. V.* An axisymmetric vortex around a rotating infinitely elongated circular cylinder in a viscous heat-conducting gas // AIP Conference Proceedings. — 2020. — Vol. 2211. — P. 030009.
9. Гаджисеев Д. А., Гайфуллин А. М., Зубцов А. В. О порождении вихря вращающимся цилиндром // Прикладная математика и механика. — 2020. — Т. 84, № 5. — С. 570—589.

Список литературы

10. Гайфуллин А. М. Вихревые течения. — М. : Наука, 2015. — 319 с.
11. Питаевский Л. П. Вычисление фононной части силы взаимного трения в сверхтекучем гелии // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1958. — Т. 35, № 6. — С. 1271—1275.
12. Fetter A. L. Scattering of sound by a classical vortex // Physical Review. — 1964. — Vol. 136. — P. 1488—1493.
13. Ferziger J. H. Low-frequency acoustic scattering from a trailing vortex // Journal of Acoustical Society of America. — 1974. — Vol. 56. — P. 1705—1707.
14. O'Shea S. Sound scattering by a potential vortex // Journal of Sound and Vibration. — 1975. — Vol. 43. — P. 109—116.
15. Candel S. M. Numerical solution of wave scattering problems in the parabolic approximation // Journal of Fluid Mechanics. — 1979. — Vol. 90. — P. 465—507.
16. Фабрикант А. Л. Рассеяние звука вихревыми течениями // Акустический журнал. — 1983. — Т. 29, № 2. — С. 262—267.
17. Копьев Б. Ф., Леонтьев Е. А. Излучение и рассеяние звука вихревым кольцом // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1987. — Т. 22, № 3. — С. 83—95.
18. Colonius T., Lele S. K., Moin P. The scattering of sound waves by a vortex: numerical simulations and analytical solutions // Journal of Fluid Mechanics. — 1994. — Vol. 260. — P. 271—298.
19. Саков П. В. К задаче о рассеянии звука вихрем // Акустический журнал. — 1991. — Т. 39, № 3. — С. 280—282.
20. Ford R., Smith S. G. L. Scattering of acoustic waves by a vortex // Journal of Fluid Mechanics. — 1999. — Vol. 386. — P. 305—328.
21. Howe M. S. On the scattering of sound by a rectilinear vortex // Journal of Sound and Vibration. — 1999. — Vol. 227. — P. 1003—1017.

22. *Kopiev V. F., Belyaev I. V.* On long-wave sound scattering by a Rankine vortex: Non-resonant and resonant cases // Journal of Sound and Vibration. — 2010. — Vol. 329. — P. 1409—1421.
23. *Lighthill M. J.* On the energy scattered from the interaction of turbulence with sound or shock waves // Mathematical Proceedings of Cambridge Philosophical Society. — 1953. — Vol. 49. — P. 531—551.
24. *Howe M. S.* Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute // Journal of Fluid Mechanics. — 1975. — Vol. 71. — P. 625—673.
25. *Големиштюк Г. М., Фабрикант А. Л.* Рассеяние и усиление звуковых волн цилиндрическим вихрем // Акустический журнал. — 1980. — Т. 26, № 3. — С. 383—390.
26. *Nazarenko S. V.* Absorption of sound by vortex filaments // Physical Review Letters. — 1994. — Vol. 73. — P. 1793—1796.
27. *Nazarenko S. V., Zabusky N. J., Scheidegger T.* Nonlinear sound-vortex interactions in an inviscid isentropic fluid: A two-fluid model // Physics of Fluids. — 1995. — Vol. 7. — P. 2407—2419.
28. *Fabrikant A. L., Raevsky M. A.* The influence of drift flow turbulence on surface gravity wave propagation // Journal of Fluid Mechanics. — 1994. — Vol. 262. — P. 141—156.
29. *Aharonov Y., Bohm D.* Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory // Physical Review. — 1959. — Vol. 115. — P. 485—491.
30. *Coste C., Lund F., Umeki M.* Scattering of dislocated wave fronts by vertical vorticity and the Aharonov-Bohm effect. I. Shallow water // Physical Review E. — 1999. — Vol. 60. — P. 4908—4916.
31. *Smith S. G. L.* Scattering of acoustic waves by a superfluid vortex // Journal of Physics A. — 2002. — Vol. 35. — P. 3597—3607.
32. Scattering of electromagnetic wave by vortex flow / J.-Y. Wei [et al.] // Physics Letters A. — 2017. — Vol. 381. — P. 1463—1469.
33. Wavefront dislocations in the Aharonov-Bohm effect and its water wave analogue / M. V. Berry [et al.] // European Journal of Physics. — 1980. — Vol. 1. — P. 154—162.

34. *Reinschke J., Möhring W., Obermeier F.* Scattering of sound waves by a cylindrical vortex: a semi-analytical theory // Journal of Fluid Mechanics. — 1997. — Vol. 333. — P. 273—299.
35. *Pinton J.-F., Brilliant G.* Sound and vorticity interactions: transmission and scattering // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. — 2005. — Vol. 18, no. 6. — P. 413—433.
36. *Berhet R., Lund F.* The forward scattering of sound by vorticity // Physics of Fluids. — 1995. — Vol. 7. — P. 2522—2524.
37. *Беляев И. В., Коньёв В. Ф.* К постановке задачи о рассеянии звука цилиндрическим вихрем // Акустический журнал. — 2008. — Т. 54, № 5. — С. 699—711.
38. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — М. : Дрофа, 2003. — 840 с. — 7-е изд.
39. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. — 744 с.
40. *Walker J. D. A.* The boundary layer due to rectilinear vortex // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. — 1978. — Vol. 359. — P. 167—188.
41. *Гайдулин А. М., Зубцов А. В.* Диффузия двух вихрей // Известия РАН. Механика жидкости и газа. — 2004. — № 1. — С. 126—142.
42. *Dee F. W., Nicholas O. P.* Flight measurements of wingtip vortex motion near the ground // Aeronautical Research Council Current Papers. — 1969. — Vol. 1065.
43. *Ersoy S., Walker J. D. A.* Viscous flow induced by counter-rotating vortices // Physics of Fluids. — 1985. — Vol. 28, no. 9. — P. 2687—2698.
44. *Harvey J. K., Perry F. J.* Flowfield produced by trailing vortices in the vicinity of the ground // AIAA Journal. — 1971. — Vol. 9, no. 8. — P. 1659—1660.
45. *Peace A. J., Riley N.* A viscous vortex pair in ground effect // Journal of Fluid Mechanics. — 1983. — Vol. 129. — P. 409—426.
46. *Zheng Z. C., Ash R. L.* Study of aircraft wake vortex behavior near the ground // AIAA Journal. — 1996. — Vol. 34, no. 3. — P. 580—589.
47. *Orlandi P.* Vortex dipole rebound from a wall // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. — 1990. — Vol. 2, no. 8. — P. 1429—1436.

48. *Doligalski T. L., Smith C. R., Walker J. D.* A Vortex interaction with walls // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1994. — Vol. 26. — P. 573—616.
49. *Prandtl L.* Motion of fluids with very little viscosity // Verh. III, Int. Math. Kongr. — Heidelberg, 1904. — P. 484—491.
50. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика. — М. : Наука, 1986. — 736 с.
51. *Goldstein S.* On laminar boundary-layer flow near a position of separation // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. — 1948. — Vol. 1, no. 1. — P. 43—69.
52. *Нейланд В. Я.* К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1969. — № 4. — С. 53—57.
53. *Сычёв В. В.* О ламинарном отрыве // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1972. — № 3. — С. 47—59.
54. Асимптотическая теория отрывных течений / В. В. Сычёв [и др.]. — М. : Наука, 1987. — 256 с.
55. *Сычёв В. В.* Асимптотическая теория нестационарного отрыва // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1979. — № 6. — С. 21—32.
56. *N. T. S.* Concerning marginal singularities in the boundary-layer flow on a downstream-moving surface // Journal of Fluid Mechanics. — 1996. — Vol. 308. — P. 171—194.
57. *Rott N.* Unsteady viscous flow in the vicinity of a stagnation point // Quarterly of Applied Mathematics. — 1956. — Vol. 13, no. 4. — P. 444—451.
58. *Sears W. R.* Some recent developments in airfoil theory // Journal of the Aeronautical Sciences. — 1956. — Vol. 23, no. 5. — P. 490—499.
59. *Moore F. K.* On the separation of the unsteady laminar boundary layer // Boundary Layer Research / ed. by H. Görtler. — Berlin : Springer-Verlag, 1958. — P. 296—311.
60. *Haller G.* Exact theory of unsteady separation for two-dimensional flows // Journal of Fluid Mechanics. — 2004. — Vol. 512. — P. 257—311.
61. Моделирование периодических вихревых структур в следе за профилем / П. А. Баранов [и др.] // Ученые записки ЦАГИ. — 2014. — Т. 45, № 2.

62. Гайфуллин А. М. Автомодельное нестационарное течение вязкой жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. — 2005. — № 4. — С. 29—35.
63. Гайфуллин А. М. Обтекание пластины с движущейся против потока поверхностью // Известия РАН. Механика жидкости и газа. — 2006. — № 3. — С. 60—66.
64. Гайфуллин А., Зубцов А. Обтекание пластины с подвижной поверхностью // Известия РАН. Механика жидкости и газа. — 2009. — № 4. — С. 73—78.
65. Гайфуллин А., Зубцов А. Асимптотическая структура нестационарного течения около полубесконечной пластины с подвижной поверхностью // Известия РАН. Механика жидкости и газа. — 2013. — № 1. — С. 88—101.
66. Türk L., Coors D., Jacob D. Behavior of wake vortices near the ground over a large range of Reynolds numbers // Aerospace Science and Technology. — 1999. — Vol. 2. — P. 71—81.
67. Босняков И. С., Судаков Г. Г. Моделирование явления «отскока» вихревого следа за самолетом от поверхности земли с помощью LES // Труды Московского физико-технического института. — 2015. — Т. 7, № 2. — С. 99—107.
68. Crow S. C. Stability theory for a pair of trailing vortices // AIAA Journal. — 1970. — Vol. 8, no. 12. — P. 2172—2179.
69. Гайфуллин А. М. Уравнения нарастания возмущений в следе за самолетом // Известия РАН. Механика жидкости и газа. — 2001. — № 3. — С. 122—132.
70. Алферов О. С., Некрасов И. В., Петров А. Г. Обтекание пологого двухмерного холма турбулентным потоком // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. — 2000. — Т. 36, № 1. — С. 55.
71. Петров А. Г., Потапов И. И. Моделирование обтекания турбулентным потоком периодической донной поверхности // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. — 2017. — Т. 53, № 3. — С. 415—421.
72. Веденеев В. В. Распространение волн в слое вязкоупругого материала, подстилающим слой движущейся жидкости // Прикладная математика и механика. — 2016. — Т. 80, № 3. — С. 317—343.

73. *Blokhintsev D. I.* Acoustics of a nonhomogeneous moving medium // N. A. C. A. Technical Memorandum. — 1946. — no. 1399.
74. *Blokhintzev D.* The propagation of sound in an inhomogeneous and moving medium I // Journal of Acoustical Society of America. — 1946. — Vol. 18. — P. 322—328.
75. *Lighthill M. J.* On sound generated aerodynamically I. General theory // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. — 1952. — Vol. 211, no. 1107. — P. 564—587.
76. *Lighthill M. J.* On sound generated aerodynamically II. Turbulence as a source of sound // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. — 1954. — Vol. 222, no. 1148. — P. 1—32.
77. *Schot S. H.* Eighty years of Sommerfeld's radiation condition // Historia mathematica. — 1992. — Vol. 19. — P. 385—401.
78. *Свешников А. Г., Богослов А. Н., Красиков В. В.* Лекции по математической физике. Учебное пособие. — М. : МГУ, 1993. — 352 с.
79. *Kambe T., Oo U. M.* Scattering of sound by a vortex ring // Journal of Physical Society of Japan. — 1981. — Vol. 50. — P. 3507—3516.
80. *Howe M. S.* On the scattering of sound by a vortex ring // Journal of Sound and Vibration. — 1983. — Vol. 87. — P. 567—571.
81. *Tanaka K., Ishii S.* Scattering of a plane sound wave by a vortex pair // Journal of Physical Society of Japan. — 1982. — Vol. 51. — P. 1992—1999.
82. *Громов П. Р., Езерский А. Б., Фабрикант А. Л.* Рассеяние звука на вихревом следе за цилиндром // Акустический журнал. — 1982. — Т. 28, № 6. — С. 763—769.
83. *Климов В. В., Прозоровский В. Л.* Рассеяние акустических волн на трехмерном вихре // Акустический журнал. — 1987. — Т. 33, № 1. — С. 128—131.
84. *Naugolnykh K.* Sound scattering by a vortex dipole // Journal of Acoustical Society of America. — 2013. — Vol. 133. — P. 1882—1884.
85. *Berhet R., Fauve S., Labbé R.* Study of the sound-vortex interaction: direct numerical simulations and experimental results // European Physical Journal B. — 2003. — Vol. 32. — P. 237—242.

86. *Karabasov S. A., Kopiev V. F., Goloviznin V. M.* On a classical problem of acoustic wave scattering by a free vortex: numerical modelling // 15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (30th AIAA Aeroacoustics Conference). — AIAA, 2009. — P. 3234.
87. *Доронина О. А., Жданова Н. С.* Численное моделирование рассеяния акустических волн изолированными вихревыми структурами // Математическое моделирование. — 2013. — Т. 25, № 9. — С. 85—94.
88. *Iwatsu R., Tsuru H.* Numerical simulation of acoustic scattering from a circular vortex // Theoretical and Applied Mechanics Japan. — 2013. — Vol. 61. — P. 95—104.
89. *Clair V., Gabard G.* Numerical assessment of the scattering of acoustic waves by turbulent structures // 21st AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. — 2015. — P. 2680.
90. *Horne W.* Measurements of the scattering of sound by a line vortex // AIAA Paper. — 1983. — P. 0676.
91. *Labbe R., Pinton J. F.* Propagation of sound through a turbulent vortex // Physical Review Letters. — 1998. — Vol. 81. — P. 1413—1416.
92. Surface wave scattering by a vertical vortex and the symmetry of the Aharonov-Bohm wave function / F. Vivanco [et al.] // Physical Review Letters. — 1999. — Vol. 83. — P. 1966—1969.
93. Scattering of sound by a vorticity filament: An experimental and numerical investigation / S. Manneville [et al.] // Physical Review E. — 2001. — Vol. 63. — P. 036607.
94. *Berthet R., Coste C.* Using a partial-wave method for sound-mean-flow scattering problems // Physical Review E. — 2003. — Vol. 67. — P. 036604.
95. *Smith S. G. L., Ford R.* Three-dimensional acoustic scattering by vortical flows. I. General theory // Physics of Fluids. — 2001. — Vol. 13. — P. 2876—2889.
96. *Oseen C. W.* Über die Wirbelbewegung in einer reibenden Flüssigkeit // Arkiv för matematik, astronomi och fysik. — 1912. — Vol. 7. — P. 1—13.
97. *Mack L. M.* The compressible viscous heat-conducting vortex // Journal of Fluid Mechanics. — 1960. — Vol. 8. — P. 284—292.

98. *Башкин В. А., Егоров И. В.* Численное исследование задач внешней и внутренней аэродинамики. — М. : Физматлит, 2013. — 332 с.
99. *Nair M. T., Sengupta T. K., Chauhan U. S.* Flow past rotating cylinders at high Reynolds numbers using higher order upwind scheme // Computers and Fluids. — 1998. — Vol. 27, no. 1. — P. 47—70.
100. *Калинин Е. И., Мазо А. Б.* Стационарные и периодические режимы ламинарного обтекания врачающегося цилиндра // Ученые записки ЦАГИ. — 2011. — Т. 42, № 5.
101. *Петров А. Г., Юдин М. А.* К динамике цилиндра в ограниченном потоке идеальной жидкости с постоянной завихренностью // Прикладная математика и механика. — 2019. — Т. 83, № 3. — С. 393—402.
102. *Петров А. Г., Юдин М. А.* Устойчивость упруго закрепленного цилиндра в циркуляционном потоке вязкой жидкости // Прикладная математика и механика. — 2020. — Т. 84, № 4. — С. 455—466.
103. Моделирование эффекта снижения лобового сопротивления цилиндра с выступающим диском при высоких числах Маха / С. А. Исаев [и др.] // Письма в Журнал технической физики. — 2014. — Т. 40, № 22. — С. 21—29.
104. *Poouch П.* Вычислительная гидродинамика. — М. : Мир, 1980. — 618 с.
105. *Биркин А. П.* О точных решениях уравнений Навье–Стокса для течения сжимаемого газа в каналах // Ученые записки ЦАГИ. — 1970. — Т. 1, № 6.
106. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкостей. — М. : Мир, 1967. — 310 с.
107. *McIntyre M. E.* Wave–vortex interactions, remote recoil, the Aharonov–Bohm effect and the Craik–Leibovich equation // Journal of Fluid Mechanics. — 2019. — Vol. 881. — P. 182—217.
108. *Balmforth N. J., Smith S. G. L., Young W. R.* Enhanced dispersion of near-inertial waves in an idealized geostrophic flow // Journal of Marine Research. — 1998. — Vol. 56. — P. 1—40.
109. *Smith S. G. L.* Near-inertial oscillations of a barotropic vortex: trapped modes and time evolution // Journal of Physical Oceanography. — 1999. — Vol. 29. — P. 747—761.

110. *Thomas J., Smith K. S., Bühler O.* Near-inertial wave dispersion by geostrophic flows // Journal of Fluid Mechanics. — 2017. — Vol. 817. — P. 406—438.
111. *Ford R.* Gravity wave radiation from vortex trains in rotating shallow water // Journal of Fluid Mechanics. — 1994. — Vol. 281. — P. 81—118.
112. *McIntyre M. E.* Spontaneous imbalance and hybrid vortex-gravity structures // Journal of Atmospheric Sciences. — 2009. — Vol. 66. — P. 1315—1326.
113. *Plougonven R., Zeitlin V.* Internal gravity wave emission from a pancake vortex: An example of wave-vortex interaction in strongly stratified flows // Physics of Fluids. — 2002. — Vol. 14. — P. 1259—1268.
114. *Thomas J.* New model for acoustic waves propagating through a vortical flow // Journal of Fluid Mechanics. — 2017. — Vol. 823. — P. 658—674.
115. *Rellich F.* Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von... $u+... u=0$ in unendlichen Gebieten // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. — 1943. — Vol. 53. — P. 57—65.
116. *Lund F., Rojas C.* Ultrasound as a probe of turbulence // Physica D. — 1989. — Vol. 37. — P. 508—514.
117. *Копьев В. Ф., Леонтьев Е. А.* Об акустической неустойчивости аксиального вихря // Акустический журнал. — 1983. — Т. 29, № 2. — С. 111—115.
118. *Копьев В. Ф., Чернышёв С. А.* Колебания вихревого кольца, возникновение в нем турбулентности и генерация звука // Успехи физических наук. — 2000. — Т. 170, № 7. — С. 713—742.
119. *Sozou C.* Resonant interaction of a sound wave with a cylindrical vortex // Journal of Acoustical Society of America. — 1990. — Vol. 87. — P. 2342—2348.
120. *Федорюк М. Б.* Метод стационарной фазы для многомерных интегралов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1962. — Т. 2, № 1. — С. 145—150.
121. *Татарский Б. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М. : Наука, 1967. — 548 с.
122. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. — М. : Наука, 1967. — 720 с. — ч. 2.

123. *Крылов В. В.* Основы теории излучения и рассеяния звука. — М. : МГУ, 1989. — 118 с.
124. *Lindsay R. B.* Compressional wave front propagation through a simple vortex // Journal of Acoustical Society of America. — 1948. — Vol. 20. — P. 89—94.
125. *Salant R. F.* Acoustic Rays in Two-Dimensional Rotating Flows // Journal of Acoustical Society of America. — 1969. — Vol. 46. — P. 1153—1157.
126. *Brychkov Y. A., Savischenko N. V.* Some properties of the Owen T-function // Integral Transforms and Special Functions. — 2016. — Vol. 27. — P. 163—180.
127. *Owen D. B.* Tables for computing bivariate normal probabilities // Annals of Mathematical Statistics. — 1956. — Vol. 27. — P. 1075—1090.
128. *Borovikov V. A.* Uniform Stationary Phase Method. — Institution of Electrical Engineers, 1994. — 233 p.

Приложение А

Вывод решения из § 3.3

Решение ЗИ с источником (3.58) при $\Gamma = \exp(-\varepsilon^2 r^2)$ в главном приближении при $\varepsilon \rightarrow 0$ можно вывести, используя точное представление с помощью преобразования Фурье (3.65) с правилом обхода (3.66) для Фурье-образа источника (3.74). Будем использовать метод, разработанный [20; 21] для случая ПВТВ, соответствующему $\varepsilon = 0$.

Решение (3.65), (3.74) представляется в виде суммы двух членов:

$$\mathbf{U}_{11} = \mathbf{U}_{11}^p + \mathbf{U}_{11}^c, \quad (\text{A.1})$$

$$\rho_{11}^p = -\frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{k}})}{1 - \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{k}}} \frac{(1 - e^{-|\mathbf{K} - \hat{\mathbf{k}}|^2/4\varepsilon^2})}{|\mathbf{K} - \hat{\mathbf{k}}|^2} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} d^2 \mathbf{K}, \quad (\text{A.2})$$

$$\rho_{11}^c = -\frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{k}})}{1 - \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{k}}} \frac{(1 - e^{-|\mathbf{K} - \hat{\mathbf{k}}|^2/4\varepsilon^2})}{1 - K^2} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} d^2 \mathbf{K}, \quad (\text{A.3})$$

причём полюс $K_x = 1$ обходится по правилу $\text{Imag}(K_x) < 0$, что согласуется с (3.66).

Интеграл (A.2) представляет собой обратное преобразование Фурье от функции $\widehat{q}_{11}(K_x, K_y)/2(1 - K_x)$. При выбранном правиле обхода Фурье-образ $1/2(1 - K_x)$ равен $-\pi i e^{ix} \mathcal{H}(x) \delta(y)$, где $\mathcal{H}(x)$ — функция Хевисайда, $\delta(y)$ — дельта-функция. Применяя теорему о свёртке и подставляя (3.58), (3.59) вместо $q_{11}(x, y)$, получаем точное представление

$$\begin{aligned} \rho_{11}^p &= -e^{i\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}} \left\{ i \int_{-\hat{\mathbf{k}}\infty}^r \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_{10}(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{k}} \cdot d\mathbf{r}' + \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_{10}(\mathbf{r}) \right\} = \\ &= e^{ix} \left\{ \pi i \left[2T \left(\sqrt{2}\varepsilon y, x/y \right) + \frac{1}{2} (\text{sgn}(y) - \text{erf}(\varepsilon y)) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y}{x^2 + y^2} e^{-\varepsilon^2(x^2 + y^2)} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

где

$$T(\zeta, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \frac{e^{-\zeta^2(1+x'^2)/2}}{1+x'^2} dx' \quad (\text{A.5})$$

— T -функция Оуэна [126; 127]. Особенность в (A.4) связана с рассмотрением точечного вихря.

Проинтегрируем выражение (A.3) по K_y , обходя полюса $K_y = \pm\sqrt{1 - K_x^2}$ и выбирая регулярную ветвь функции $\sqrt{K_x^2 - 1}$ в соответствии с (3.66). Решение представляется в виде интеграла Зоммерфельда по переменной $\psi = \xi + i\eta$ такой, что $K_x = \cos \psi$, $i\sqrt{K_x^2 - 1} = \sin \psi$:

$$\rho_{11}^c = \rho_{11}^{c,0} + \rho_{11}^{c,1}, \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \rho_{11}^{c,0} &= \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(y) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_x}{1 - K_x} e^{iK_x x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_y}{1 - K_x^2 - K_y^2} e^{iK_y |y|} dK_y \right) dK_x = \\ &= \frac{\operatorname{sgn}(y)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_x}{1 - K_x} e^{-\sqrt{K_x^2 - 1}|y| + iK_x x} dK_x = \\ &= -\frac{\operatorname{sgn}(\theta)}{2} \int_C e^{ir \cos(\psi - |\theta|)} \cos \psi \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} d\psi, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \rho_{11}^{c,1} &= -\frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(y) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_x}{1 - K_x} e^{-(K_x - 1)^2/4\varepsilon^2} e^{iK_x x} dK_x \cdot \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_y}{1 - K_x^2 - K_y^2} e^{-K_y^2/4\varepsilon^2} e^{iK_y |y|} dK_y = \\ &= \rho_{11}^{c,1|+} + \rho_{11}^{c,1|-}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{11}^{c,1|\pm} &= \frac{\operatorname{sgn}(y)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\pm} \frac{K_x}{1 - K_x} e^{\mp\sqrt{K_x^2 - 1}|y| + iK_x x} dK_x = \\ &= -\frac{\operatorname{sgn}(\theta)}{2} \int_C F_{\pm} e^{ir \cos(\psi \mp |\theta|)} \cos \psi \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} d\psi, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} F_{\pm} &= \mp \frac{1}{2} e^{(K_x - 1)/2\varepsilon^2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(-\frac{\sqrt{K_x^2 - 1}}{2\varepsilon} \pm \varepsilon |y| \right) \right] \\ &= \mp \frac{1}{2} e^{-\sin^2(\psi/2)/\varepsilon^2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{i \sin \psi}{2\varepsilon} \pm \varepsilon r \sin |\theta| \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Контур интегрирования C в (A.7), (A.8) состоит из трёх прямых линий

$$\psi = \pi + i\eta, \quad -\infty < \eta \leq 0; \quad \psi = \xi, \quad \pi \geq \xi > 0; \quad \psi = i\eta, \quad 0 < \eta < \infty \quad (\text{A.10})$$

и бесконечно малой дуги, обходящей полюс $\psi = 0$ против часовой стрелки (рисунки 39–40).

Точное представление (A.4)–(A.10) используется для получения численного решения, что особенно важно в ближнем поле, где решение в аналитическом

виде неизвестно. Область с существенными значениями подынтегральной функции включает $\text{Imag}(\psi) = O(1)$ для слагаемого (A.7) и $\psi = O(\sqrt{\varepsilon})$ для (A.8). Вклад дуги равен вычету подынтегральной функции $\psi = 0$, помноженному на $\pi i/2$.

Выражение (A.4) при $r \rightarrow \infty$ сводится к (3.87), что составляет компоненту «искажения» в области геометрической акустики $\varepsilon^2 r \rightarrow 0$.

Для вычисления (A.7)–(A.8) при $r \rightarrow \infty$ используем метод перевала [128]: деформируем контур C в путь наибыстрейшего спуска (ПНС) C_* , который определяется наиболее быстро осциллирующим множителем $\exp(E_*(\psi))$ в подынтегральной функции члена $\rho_{11}^{c,*}$. ПНС определяется как контур, проходящие через стационарную точку $\psi_{s,*}$ такую, что

$$\frac{dE_*}{d\psi} = 0 \quad \text{при } \psi = \psi_{s,*}, \quad (\text{A.11})$$

в направлении, в котором

$$\text{Imag}(E_*(\psi)) = \text{Imag}(E_*(\psi_{s,*})), \quad \text{Real}(E_*(\psi)) \leq \text{Real}(E_*(\psi_{s,*})) \quad \text{при } \psi \in C_*. \quad (\text{A.12})$$

На рисунках 39–40 стационарные точки — пересечения кривых $\text{Imag}(E_*(\psi)) = \text{Imag}(E_*(\psi_{s,*}))$. Поскольку показатель экспоненты $E_*(\psi)$ в (A.7)–(A.8) при $r \rightarrow \infty$ велик, вклад в интеграл по контуру C_* вносит только окрестность стационарной точки $|\psi - \psi_{s,*}| \rightarrow 0$.

В случае непрерывной деформации интеграл по контуру C равен интегралу по C_* . Если контур при деформации пересекает полюс $\psi = 0$, значение интеграла изменяется на значение вычета подынтегральной функции в данной точке помноженный на $2\pi i$. Деформация с пересечением неограниченных областей, в которых подынтегральная функция неограниченно растёт, не допускается. Поскольку подынтегральная функция 2π -периодична, комплексная плоскость ψ изоморфна не плоскости, а цилинду; поэтому необходимо различать деформации по и против часовой стрелки.

Для слагаемого $\rho_{11}^{c,0}$ наиболее быстро осциллирующий множитель и стационарные точки, определяемые (A.11), имеют вид

$$E_0(\psi) = ir \cos(\psi - |\theta|); \quad \psi_{s,0} = |\theta|, \quad \psi'_{s,0} = |\theta| - \pi. \quad (\text{A.13})$$

ПНС, который может быть получен непрерывной деформацией контура C , проходит через точку $\psi_{s,0}$ и находится из (A.12) (см. рисунок 39):

$$\psi = |\theta| + \tau + i \ln \frac{1 - \sin \tau}{\cos \tau} \quad \text{на } C_0, \quad -\pi/2 < \tau < \pi/2. \quad (\text{A.14})$$

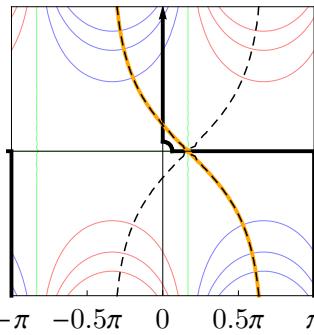


Рисунок 39 — Контуры интегрирования для (A.7) в комплексной плоскости ψ при $\theta = \pi/6$: исходный контур C (чёрный жирный) и ПНС C_0 (оранжевый). Тонкие цветные линии обозначают $\text{Real}(E_0(\psi)) = 0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 1.5$; синие кривые соответствуют отрицательным значениям, зелёные — нулю, красные — положительным. Пунктирные кривые — $\text{Imag}(E_0(\psi)) = \text{Imag}(E_0(\psi_{s,0}))$

Подставляя (A.14) в (A.7) и используя приближение $\psi \rightarrow |\theta| + \sqrt{2}e^{-i\pi/4}\tau$ при $\tau \rightarrow 0$ и т. д., имеем

$$\begin{aligned} \rho_{11}^{c,0} &\sim \frac{\text{sgn}(\theta)}{\sqrt{2}} e^{ir-i\pi/4} \cos \theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r\tau^2} \operatorname{ctg} \frac{|\theta| + \sqrt{2}e^{-i\pi/4}\tau}{2} d\tau \sim \\ &\sim \begin{cases} -\pi i e^{ir(1-\theta^2/2)} \left[\text{sgn}(\theta) - \operatorname{erf} \left(\frac{e^{-i\pi/4}\sqrt{r}\theta}{\sqrt{2}} \right) \right] & \text{при } \sqrt{r}\theta = O(1), \\ \sqrt{\frac{\pi}{2r}} e^{ir-i\pi/4} \cos \theta \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} & \text{при } \theta = O(1). \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Метод мультипликативного составления срацивающихся асимптотических разложений в (A.15), т. е. их произведение делённое на промежуточное приближение [106], даёт равномерно пригодное решение (3.84), которое составляет компоненту «излучения» в области геометрической акустики $\varepsilon^2 r \rightarrow 0$.

Таким образом, $\rho_{11}^p + \rho_{11}^{c,0}$ есть решение (3.84) + (3.87) в области геометрической акустики $\varepsilon^2 r \rightarrow 0$.

Для слагаемых $\rho_{11}^{c,1|\pm}$ выписать наиболее быстро осциллирующий множитель в явном виде затруднительно из-за наличия функции ошибок в (A.9). Для анализа поведения ПНС рассмотрим два упрощённых случая, в которых функция ошибок заменяется ближней или дальней асимптотикой; будем использовать индексы «n» и «f», соответственно.

В случае «n» множитель с функцией ошибок в (A.9) предполагается постоянным. Наиболее быстро осциллирующий множитель и стационарные точки,

определяемые (A.11), имеют вид

$$E_{1|\pm}^n(\psi) = ir \cos(\psi \mp |\theta|) - \sin^2(\psi/2)/\varepsilon^2; \quad \psi_{s,1|\pm}^n = -\frac{i}{2} \ln \frac{2i\varepsilon^2 r e^{\pm i|\theta|} + 1}{2i\varepsilon^2 r e^{\mp i|\theta|} + 1}, \quad (\text{A.16})$$

где каждое из $\psi_{s,1|+}^n$ и $\psi_{s,1|-}^n$ включает по две стационарные точки на расстоянии π друг от друга, соответствующие различным ветвям комплексного логарифма. В каждой из них

$$E_{1|\pm}^n(\psi_{s,1|\pm}^n) = -\left(1 - \sqrt{1 + 4i\varepsilon^2 r \cos \theta - 4(\varepsilon^2 r)^2}\right)/2\varepsilon^2; \quad (\text{A.17})$$

угол наклона к оси x равен $-(1/4)\operatorname{arccot}[(1 - 4(\varepsilon^2 r)^2)/(4\varepsilon^2 r \cos \theta)]$. ПНС, который может быть получен допустимой деформацией контура C , проходит через стационарную точку с действительной частью лежащей между 0 и $\pm\pi$. Типичные ПНС $C_{1|+}^n$ и $C_{1|-}^n$, антисимметричные друг другу относительно начала координат, показаны на рисунках 40а, б, г, д. Контур $C_{1|+}^n$ стремится к C_0 при $\varepsilon^2 r \rightarrow \infty$ и к кусочно прямолинейному контуру $\psi = \pi + i\eta$, $-\infty < \eta \leq 0$; $\psi = \xi$, $\pi \geq \xi \geq -\pi$; $\psi = -\pi + i\eta$, $0 < \eta < \infty$ при $\varepsilon^2 r \rightarrow 0$.

В случае «f» множитель с функцией ошибок в (A.9) заменяется на дальнюю асимптотику

$$1 + \operatorname{erf}(\varphi) \rightarrow -\exp(-\varphi^2)/(\sqrt{\pi}\varphi) \quad \text{при } \varphi \rightarrow \infty \quad \text{кроме } -\pi/4 \leq \arg(\varphi) \leq \pi/4, \quad (\text{A.18})$$

которая достигается на контуре C . Наиболее быстро осциллирующий множитель и стационарные точки, определяемые (A.11), совпадает для $\rho_{11}^{c,1|+}$ и $\rho_{11}^{c,1|-}$:

$$\begin{aligned} E_1^f(\psi) &= -\varepsilon^2 r^2 \sin^2 \theta + ir \cos \theta \cos \psi - \sin^4(\psi/2)/\varepsilon^2; \\ \psi_{s,1}^f &= 0, \quad \psi_{s,1}^{f'} = \pi, \quad \psi_{s,1}^{f\pm} = \pm \arccos(1 + 2i\varepsilon^2 r \cos \theta). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Из-за члена четвёртой степени, ПНС представляет собой кусочно гладкую кривую, качественно различную при $|\theta| < \pi/2$ и $|\theta| > \pi/2$.

При $|\theta| < \pi/2$ контур C_1^f проходит через точки $\psi_{s,1}^f$ (с обходом против часовой стрелки), $\psi_{s,1}^{f+}$ и $\psi_{s,1}^{f-}$ (рисунок 40с). Участок между $\psi_{s,1}^{f+}$ и $\psi_{s,1}^{f-}$ совпадает с (A.14) при $\theta = 0$. Достигая точек $\psi_{s,1}^{f+}$ и $\psi_{s,1}^{f-}$ с углом наклона $-(1/2)\operatorname{arccot}(-\varepsilon^2 r \cos \theta)$ к оси x , контур C_1^f поворачивает на 90° для того, чтобы остаться в пределах области с убывающей подынтегральной функцией. На бесконечности он стремится к C . Максимальное значение подынтегральной функции достигается в точке $\psi_{s,1}^f$:

$$\operatorname{Real}(E_1^f(\psi_{s,1}^f)) = -\varepsilon^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad \operatorname{Real}(E_1^f(\psi_{s,1}^{f\pm})) = -\varepsilon^2 r^2. \quad (\text{A.20})$$

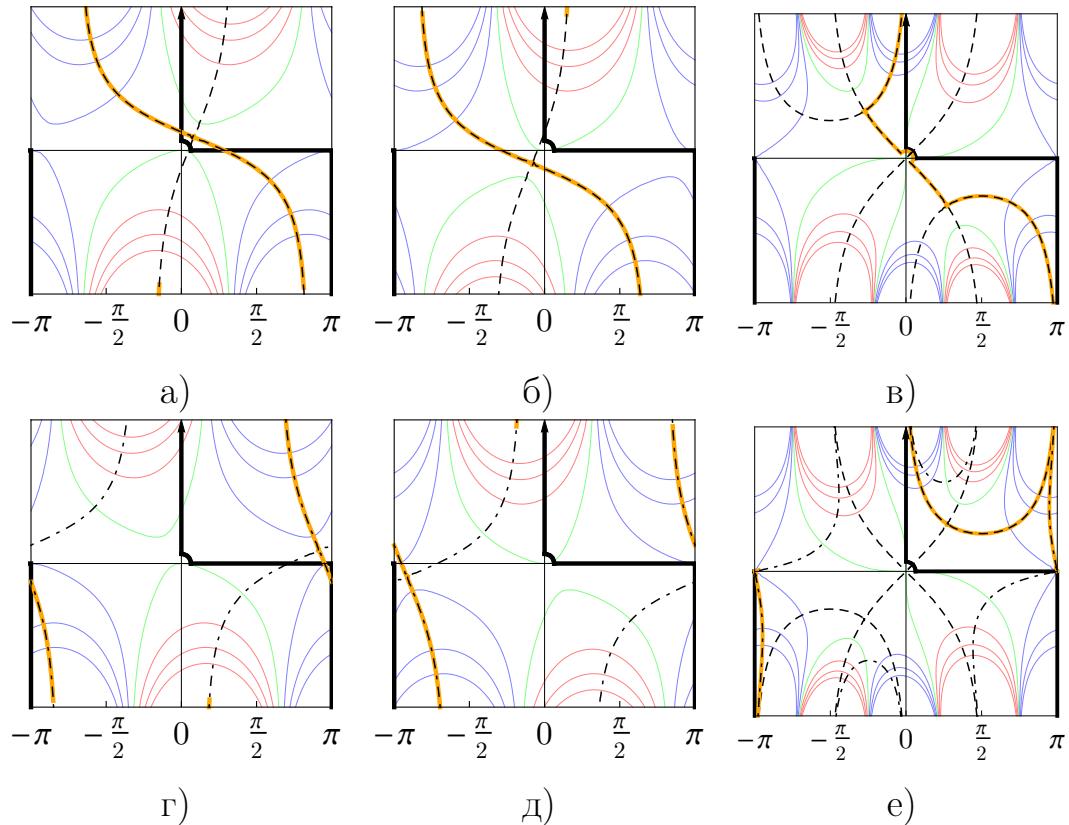


Рисунок 40 — Контуры интегрирования для (A.8) в комплексной плоскости Ψ при $r = 0.5$, исходный контур C (чёрные жирные) и вспомогательные ПНС (оранжевые): а – $C_{1|+}^n$ при $\theta = \pi/6$, б – $C_{1|-}^n$ при $\theta = \pi/6$, в – C_1^f при $\theta = \pi/6$, г – $C_{1|+}^n$ при $\theta = 5\pi/6$, д – $C_{1|-}^n$ при $\theta = 5\pi/6$, е – C_1^f при $\theta = 5\pi/6$. Тонкие цветные линии обозначают $\text{Real}(E_*(\Psi)) = n\epsilon^{-2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$; синие кривые соответствуют отрицательным значениям, зелёные — нулю, красные — положительным (A.16). Пунктирные и штрих-пунктирные кривые — $\text{Imag}(E_*(\Psi)) = \text{Imag}(E_*(\Psi_{s,*}^n))$, соответствующие различным $\text{Imag}(E_*(\Psi_{s,*}^n))$

При $\epsilon^2 r \rightarrow 0$ контур C_1^f стремится к C ; при $\epsilon^2 r \rightarrow \infty$ его C_0 -подобная часть неограниченно расширяется.

При $|\theta| > \pi/2$ контур C_1^f состоит из двух участков с разными значениями $\text{Imag}(E_1^f(\Psi))$ (рисунок 40е), примыкающих друг к другу в точке, близкой к $\pi + i\eta$, $\eta \gg 1$, в которой значение подынтегральной функции экспоненциально мало. Участок с $\text{Imag}(E_1^f(\Psi)) = -r \cos \theta$ проходит через стационарную точку $\Psi_{s,1}'$, участок с $\text{Imag}(E_1^f(\Psi)) = r \cos \theta$ — через точку $\Psi_{s,1}^{f+}$. Максимальное значение подынтегральной функции достигается в точке $\Psi_{s,1}^{f+}$ и определяется формулой (A.20).

Действительный ПНС $C_{1|\pm}$ должен быть близок к $C_{1|\pm}^n$ вблизи стационарной точки из (A.16) и к C_1^f вдали. Интеграл по $C_{1|\pm}$ равен интегралу по $C_{1|\pm}^n$,

поскольку вклад даёт только окрестность стационарной точки. Поведение C_1^f задаёт направление деформации контура, по или против часовой стрелки, — то, при котором нет пересечения неограниченных областей, в которых подынтегральная функция неограниченно растёт. Сравнение рисунков 40а,б с 40с и 40г,д с 40е показывает, что C деформируется в $C_{1|+}$ непрерывно как при $|\theta| < \pi/2$, так и при $|\theta| > \pi/2$; в то время как в $C_{1|-}$ — с пересечением полюса $\psi = 0$ при $|\theta| < \pi/2$ и непрерывно при $|\theta| > \pi/2$.

Теперь вычислим $\rho_{11}^{c,1}$. Из (A.8)–(A.9) ясно, что

$$\rho_{11}^{c,1|+} \sim -\rho_{11}^{c,1|+} \quad \text{при } \varepsilon y \rightarrow 0. \quad (\text{A.21})$$

Кроме того, на регулярной ветви (A.17), соответствующей выбранному ПНС,

$$\text{Real} \left(E_{1|\pm}^n(\Psi_{s,1|\pm}^n) \right) \rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad \begin{cases} \theta/\varepsilon \rightarrow \infty, & \varepsilon^2 r = O(1) \quad \text{или} \quad \varepsilon^2 r \rightarrow \infty, \\ \sqrt{r}\theta \rightarrow \infty, & \varepsilon^2 r \rightarrow 0. \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

При условии (A.22) слагаемые $\rho_{11}^{c,1|\pm}$ экспоненциально затухают. Итого, из (A.21)–(A.22) следует

$$\rho_{11}^{c,1} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon^2 r \rightarrow 0 \quad \text{или} \quad \theta/\varepsilon \rightarrow \infty. \quad (\text{A.23})$$

Это доказывает, что решение (3.84) + (3.87) пригодно в области геометрической акустики, а также в ближнем поле на больших углах, где оно сводится к (3.97).

В дальнем поле $\varepsilon^2 r \rightarrow \infty$, значимая часть ПНС $C_{1|+}$ стремится к C_0 , а значимая часть ПНС $C_{1|-}$ — к контуру, антисимметричному C_0 относительно начала координат. Повторим вывод формулы (A.15), подставляя значение (A.9) в стационарной точке $\psi = \pm|\theta|$. К $\rho_{11}^{c,1|+}$ при $|\theta| < \pi/2$ добавим вычет подынтегральной функции в точке $\psi = 0$, помноженный на $2\pi i$:

$$\rho_{11}^{c,1|+} \sim -\frac{1}{2} e^{-\theta^2/4\varepsilon^2} [1 + \operatorname{erf}(\varepsilon r \sin |\theta|)] \rho_{11}^{c,0}, \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} \rho_{11}^{c,1|-} \sim & -\pi i e^{ir \cos \theta} \mathcal{H}(\cos \theta) [\operatorname{sgn}(\theta) - \operatorname{erf}(\varepsilon r \sin \theta)] \sim \\ & -\frac{1}{2} e^{-\theta^2/4\varepsilon^2} [1 - \operatorname{erf}(\varepsilon r \sin |\theta|)] \rho_{11}^{c,0} \quad \text{при } \varepsilon^2 r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Сумма (A.24) и (A.25) даёт

$$\rho_{11}^{c,1} \sim -\pi i e^{ir \cos \theta} \mathcal{H}(\cos \theta) [\operatorname{sgn}(\theta) - \operatorname{erf}(\varepsilon r \sin \theta)] - e^{-\theta^2/4\varepsilon^2} \rho_{11}^{c,0} \quad \text{при } \varepsilon^2 r \rightarrow \infty. \quad (\text{A.26})$$

Первый член в (A.26) сокращается с (3.87); сумма второго и (3.84) в главном приближении эквивалентно решению в дальнем поле (3.68), (3.75), (3.76).