

На правах рукописи



ГОРДЕЕВА Надежда Михайловна

**Краевая задача для системы
интегро–дифференциальных уравнений,
возникающая в физике плазмы**

1.1.2 — *дифференциальные уравнения и математическая физика*

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва 2024

Работа выполнена в Федеральном государственном учреждении
«Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской академии наук» (ФИЦ ИУ РАН).

Научный руководитель:

БЕЗРОДНЫХ Сергей Игоревич, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», главный научный сотрудник.

Официальные оппоненты:

ПОЛОСИН Алексей Андреевич, доктор физико–математических наук, доцент,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»,
факультет вычислительной математики и кибернетики, доцент;

МИНЕНКОВ Дмитрий Сергеевич, кандидат физико–математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Лаборатория механики природных катастроф, старший научный сотрудник.

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

Защита состоится 26 сентября 2024 г. в 15:30 на заседании Диссертационного совета 24.1.224.02 при ФИЦ ИУ РАН по адресу: 119333, Москва, ул. Вавилова, д. 40, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИЦ ИУ РАН по адресу: 119333, Москва, ул. Вавилова, д. 42, а также на сайте https://www.frccsc.ru/diss-council/00207303/diss/list/gordeeva_nm

Автореферат разослан « » 2024 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета 24.1.224.02,
кандидат физико-математических наук

B. Hing

В.И. НИКОНОВ

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена построению в замкнутом аналитическом виде решения краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений, возникающей при моделировании возмущения слоя плазмы электрическим полем на основе уравнений Больцмана — Максвелла. Такое решение найдено с помощью новых формул для преобразования Фурье обобщенных функций специального вида, а также новых результатов для задачи Римана сопряжения аналитических функций.

Изучаемая в работе краевая задача имеет следующий вид:

$$v\mathcal{F}_x(x, v) + A\mathcal{F}(x, v) = v\mathcal{E}(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x, s)k(s)ds, \quad (1)$$

$$\mathcal{E}_x(x) = B \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x, s)k(s)ds, \quad (2)$$

$$\mathcal{F}(l, v) = \mathcal{F}(l, -v), \quad \mathcal{F}(-l, v) = \mathcal{F}(-l, -v), \quad \mathcal{E}(l) = \mathcal{E}(-l) = 1, \quad (3)$$

где функции $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$ являются искомыми в полосе

$$\{x \in (-l, l), v \in (-\infty, +\infty)\}, \quad (4)$$

а функция $k(s)$ считается заданной и для нее предполагается условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(s)ds = 1; \quad (5)$$

величины $A \in \mathbb{C}$ и $B \in \mathbb{R}$ в уравнениях (1), (2) являются параметрами задачи.

Уравнения (1), (2) получены с помощью линеаризации системы Больцмана — Максвелла^{1,2,3,4} с модельным интегралом столкновений, взятым в форме Бхатнагара — Гросса — Крука^{5,6,7}. Величины $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$ представляют собой

¹Ландау Л.Д. О колебаниях электронной плазмы. Собрание трудов. М.: Наука, 1969. Т. 2. С. 7–25.

²Ферцигер Д., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976.

³Боголюбов Н.Н. Собрание научных трудов. Статистическая механика. Т. 8. Теория неидеального Бозе-газа, сверхтекучести и сверхпроводимости. М.: Наука, 2007.

⁴Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение задачи о поведении вырожденной электронной плазмы. Глава 10 в Энциклопедии низкотемпературной плазмы: Фортов В.Е. (глав. ред.) Т. VII-I “Математическое моделирование в низкотемпературной плазме”. С. 159–177. М.: Янус-К. 2008.

⁵Bhatnagar P.L., Gross E.M., Krook M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one component systems // Phys. Rev. 1954. V. 94. P. 511–525.

⁶Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. М., Физматлит, 2006.

⁷Биккин Х.М., Ляпилин И.И. Неравновесная термодинамика и физическая кинетика. Екатеринбург: УрО РАН, 2009.

возмущения функции распределения электронов и напряженности электрического поля соответственно, а переменные (x, v) имеют смысл координаты и скорости. В уравнениях (1), (2) ядро $k(s)$ представляет собой безразмерную невозмущенную функцию распределения, в качестве которой в работе рассмотрены функция Ферми — Дирака^{8,9,10} и функция Максвелла^{6,11,12}, а параметры A и B выражаются через плазменную частоту, частоту столкновений и частоту приложенного внешнего поля.

Для построения аналитического решения задачи (1)–(5) система уравнений (1), (2) вначале была рассмотрена во всей плоскости $(x, v) \in \mathbb{R}^2$, т.е. в более широкой, чем полоса (4), области. Затем для построения общего решения этой системы в $\mathbb{R}^2$ был применен метод преобразования Фурье. При этом прямое преобразование Фурье F применялось к уравнениям (1), (2) по координате x , а скорость v рассматривалась как параметр. Функции $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$, следуя общей схеме метода Фурье¹³, отождествляем с элементами пространства D' линейных непрерывных функционалов над пространством D финитных бесконечно дифференцируемых функций на вещественной оси x . Тогда образы Фурье $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v) := F[\mathcal{F}(x, v)]$, $\widehat{\mathcal{E}}(\zeta) := F[\mathcal{E}(x)]$ принадлежат пространству Z' линейных непрерывных функционалов над пространством Z образов Фурье функций из D ; теория пространств D' и Z' изложена в монографиях^{14,15,16}.

В результате применения преобразования Фурье к системе (1), (2) с условием (5) была получена система интегральных уравнений относительно $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v)$ и $\widehat{\mathcal{E}}(\zeta)$. Решение этой системы в пространстве Z' было найдено в аналитическом виде, а затем искомое решение исходной системы интегро-дифференциальных уравнений (1), (2) получено в пространстве D' во всей плоскости $\mathbb{R}^2$ путем вычисления обрат-

⁸ Левич В.Г., Вдовин Ю.А., Мямлин В.А. Курс теоретической физики. Том II. М.: Наука, 1971.

⁹ Абрикосов А.А. Введение в теорию нормальных металлов. М.: Наука, 1972.

¹⁰ Займан Дж. Принципы теории твердого тела. М., Мир, 1974.

¹¹ Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М., Наука. 1976.

¹² Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. Том 10: Физическая кинетика. М., Наука. 1979.

¹³ Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2000.

¹⁴ Гельфанд И.М., Шилев Г.Е. Обобщенные функции, вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматлит, 1959.

¹⁵ Шилев Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Изд-во Моск. университета, 1984.

¹⁶ Demidov A.S. Equations of Mathematical Physics. Generalized Functions and Historical Notes. М.: Springer, 2023.

ного преобразования Фурье

$$\mathcal{F}(x, v) = F^{-1}[\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v)], \quad \mathcal{E}(x) = F^{-1}[\widehat{\mathcal{E}}(\zeta)]. \quad (6)$$

Отметим, что при нахождении $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$ согласно (6) были применены новые формулы, позволяющие вычислять F^{-1} от некоторых функционалов из Z' , имеющих вид интеграла по параметру. Такие формулы найдены с помощью развития методов^{14,15,17}.

Найденное общее представление для решения $\mathcal{F}(x, v)$, $\mathcal{E}(x)$ системы (1), (2), (5) в плоскости $\mathbb{R}^2$ содержит набор произвольных констант Q_j и свободную функцию $Q(\lambda)$. Сужение такого решения на полосу (4) и учет краевых условий (3) приводит к сингулярному интегральному уравнению на вещественной прямой $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ с ядром Коши относительно функции $Q(\lambda)$, в которое константы Q_j входят в качестве параметров. Для решения этого уравнения применена модификация метода Ф.Д. Гахова¹⁸ и Н.И. Мусхелишвили¹⁹, основанного на его сведении к задаче Римана линейного сопряжения с последующим ее решением в замкнутом аналитическом виде. Для определения констант Q_j использованы условия разрешимости задачи Римана. После нахождения $Q(\lambda)$ и Q_j решение $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$ задачи (1)–(5) полностью построено. Его единственность вытекает из изоморфизма пространств D' и Z' , а также единственности решения задачи Римана.

Далее в работе выполнена численная реализация представления для $\mathcal{E}(x)$ для случаев, когда ядро $k(s)$ соответствует распределениям Ферми — Дирака и Максвелла, а затем исследована зависимость $\mathcal{E}(x)$ от частоты внешнего поля, частоты столкновений и выбора функции $k(s)$.

1. Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Развитие конструктивных методов решения математических задач, возникающих при изучении плазмы, является одним из основных направлений современной математической фи-

¹⁷ Hörmander L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators. IV, Fourier Integral Operators. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo. Springer-Verlag. 1985.

¹⁸ Гахов Ф.Д. Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.

¹⁹ Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М.: Наука, 1968.

зики и теории дифференциальных уравнений^{6,20,21,22,23}. Такие задачи играют важную роль в прикладных проблемах, связанных с удержанием плазмы в магнитных ловушках, созданием микроэлектронных приборов, изучением различных явлений в физике Солнца и в астрофизике, на что указано в многочисленных источниках, например, см.^{6,24,25,26,27,28,29,30}. Несмотря на существенный прогресс в разработке численных методов для таких задач^{31,32,33,34,35}, по-прежнему сохраняет высокую актуальность построение новых аналитических решений, а также разработка необходимого математического аппарата^{22,23,36,37,38,39}.

²⁰ Костомаров Д.П., Днестровский Ю.Н. Математическое моделирование плазмы. М.: Наука, 1982.

²¹ Инфельд Э., Роуландс Дж. Нелинейные волны, солитоны и хаос. Пер. с англ. под ред. Е.А. Кузнецова, 2-е изд. М.: Физматлит, 2006.

²² Демидов А.С. Функционально-геометрический метод решения задач со свободной границей для гармонических функций // УМН. 2010. Т. 65. Вып. 1 (396). С. 3–96.

²³ Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2012.

²⁴ Biskamp D. Magnetic Reconnection in Plasmas. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.

²⁵ Гуртов В.А. Твердотельная электроника. М.: Техносфера, 2008.

²⁶ Прист Э., Форбс Т. Магнитное пересоединение. М.: Физматлит, 2005.

²⁷ Баренгольц С. А., Месля Г. А. Взрывоэмиссионные процессы в термоядерных установках с магнитным удержанием плазмы и линейных электрон-позитронных коллайдерах // УФН. 2023. Т. 193. № 7. С. 751–769.

²⁸ Брушлинский К.В., Крючков В.В., Степин Е.В. Математическая модель равновесных конфигураций плазмы в магнитных ловушках и исследование их устойчивости // Труды МИАН. 2023. Т. 322. С. 58–70.

²⁹ Грицык П.А., Сомов Б.В. Современные аналитические модели ускорения и распространения электронов в солнечных вспышках // УФН. 2023. Т. 193. № 5. С. 465–490.

³⁰ Шакура Н.И., Постнов К.А., Колесников Д.А., Липунова Г.В. Магниторотационная неустойчивость в кеплеровских дисках: нелокальный подход // УФН. 2023. Т. 193. № 12. С. 1340–1355.

³¹ Бисикало Д.В., Жилкин А.Г., Боярчук А.А. Газодинамика тесных двойных звезд. М.: Физматлит, 2013.

³² Куликовский А.Г., Чугайнова А.П. О структурах неклассических разрывов в решениях гиперболических систем уравнений // УМН. 2022. Т. 77. Вып. 1 (463). С. 55–90.

³³ Аристов В.В., Воронич И.В., Забелок С.А. Исследование неклассического переноса с применением численных методов решения уравнения Больцмана // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 12. С. 2025–2034.

³⁴ Черемисин Ф.Г. Ускорение решения уравнения Больцмана с помощью контроля величины вкладов в интеграл столкновений // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 12. С. 2035–2050.

³⁵ Azarova O.A., Kravchenko O.V. The use of plasma structures and combined energy deposition for high-speed flow control: A selective review, Energies. 2024. V. 17. № 7. P. 1632–1670.

³⁶ Безродных С.И., Власов В.И., Сомов Б.В. Обобщенные аналитические модели токового слоя Сыроватского // Письма в Астрон. журнал. 2011. Т.37. № 2. С. 133–150.

³⁷ Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Шафаревич А.И. Новые интегральные представления канонического оператора Маслова в особых картах // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81, вып. 2. С. 53–96.

³⁸ Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Шафаревич А.И. Эффективные асимптотики решений задачи Коши с локализованными начальными данными для линейных систем дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений // УМН, 2021. Т. 76, вып. 5 (461), с. 3–80.

³⁹ Батт Ю., Йорн Э., Скубачевский А.Л. Трехмерные стационарные сферически симметричные модели звездной динамики, зависящие от локальной энергии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 9. С. 1491–1521.

Задачи об отклике плазмы на внешнее электромагнитное возмущение, к которым относится постановка (1)–(5), привлекали внимание специалистов, начиная с работ Л. Тонкса и И. Лэнгмюра^{40,41}. Развитию этого направления были посвящены исследования отечественных и зарубежных ученых^{42,43,44,45,46}. Построение аналитических решений было предметом работ^{6,7,21,22,36,47,48}, однако в литературе не прослеживается соответствующих результатов для случая, когда уравнения содержат интегральные нелокальные слагаемые как, например, в постановке (1)–(5).

Применение интегральных преобразований обобщенных функций открывает широкие возможности для развития конструктивных методов решения важных классов задач математической физики^{13,14,16}. В связи с этим получение новых формул для прямого и обратного преобразования Фурье обобщенных функций является актуальным вопросом. Основы современной теории обобщенных функций заложены в работах С.Л. Соболева, Л. Шварца, Л. Хёрмандера, И.М. Гельфанда и его научной школы, см.^{14,15,16,49,50,51,52}. В современных монографиях и курсах значительная роль отводится интегральным преобразованиям обобщенных функций медленного роста из пространства S' . Вместе с тем, при применении преобразования Фурье к системе (1), (2) естественным является рассмотрение преобразования Фурье в пространствах D' и Z' . При этом для его реализации необходимо получать явные конструкции для преобразования Фурье от малоизученного класса функций, являющихся интегра-

⁴⁰ *Langmuir I.* Oscillations in Ionized Gases // Proc. Nat. Acad. Sci. 1928. V. 14. P. 627–637.

⁴¹ *Tonks L., Langmuir I.* A General Theory of the Plasma on an Arc // Physical Rev. 1929. V. 34. P. 876–92.

⁴² *Власов А.А.* О вибрационных свойствах электронного газа. Ж. эксперим. и теор. физики. 1938. Т. 8. Вып. 3. С. 291–318.

⁴³ *Van Kampen N.G.* On the Theory of Stationary Waves in Plasmas // Physica. 1955. V. 21. P. 949–963.

⁴⁴ *Силлин В.П., Рухадзе А.А.* Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред. М.: Госатомиздат, 1961.

⁴⁵ *Кейз К.М., Цвайфель П.Ф.* Линейная теория переноса. М., Мир, 1972.

⁴⁶ *Cercignani C.* Theory and application of the Boltzmann equation. Scottish Academic Press. Edinburg and London. 1975. Имеется перевод: Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М., Мир. 1978.

⁴⁷ *Маслов В.П., Федорюк М.В.* Линейная теория затухания Ландау // Матем. сб. 1985. Т. 127 (169), № 4(8). С. 445–475.

⁴⁸ *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Метод решения граничных задач для кинетических уравнений // Ж. выч. матем. и матем. физики. 2004. Т. 44. № 6. С. 1107–1118.

⁴⁹ *Соболев С.Л.* Задача Коши в пространстве функционалов // ДАН СССР, 1935. Т. 3 (8), вып. 7 (67). С. 291–294.

⁵⁰ *Schwartz L.* Théorie des distributions. Т. 1, 2. Paris: Hermann, 1951.

⁵¹ *Хёрмандер Л.* О делении обобщенных функций на полиномы. Математика (сборник переводов). 1959. Т. 3, № 5. С. 117–130.

⁵² *Агранович М.С.* Обобщенные функции. М.: Издательство МЦНМО, 2014.

лами от семейства функционалов из Z' , непрерывно зависящих от некоторого параметра. Таким образом, найденные в диссертации новые формулы для прямого и обратного преобразования Фурье являются актуальным результатом, востребованным для решения задач математической физики.

Задача линейного сопряжения аналитических функций восходит к классическому труду Б. Римана⁵³; конструктивные методы для таких задач и история их создания подробно отражены в монографиях^{18,19,54}. Развитие различных математических аспектов, связанных с этой задачей, активно продолжается в настоящее время^{55,56,57,58,59,60,61,62,63}. Это связано не только с фундаментальным значением задачи Римана для теории краевых задач теории аналитических функций, но и с многими актуальными приложениями, см. например^{36,60,61,64,65,66}. Необходимо отметить, что при реализации методов Ф.Д. Гахова и Н.И. Мусхелишвили для практических задач, как правило, необходима модификация классических представлений для ре-

⁵³ *Риман Б.* Сочинения. Гостехиздат, 1948.

⁵⁴ *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Особые интегральные уравнения типа свертки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 33–52.

⁵⁵ *Солдатов А.П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М.: Высшая школа, 1991.

⁵⁶ *Солдатов А.П.* Весовые классы Харди аналитических функций // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 6. С. 809–817.

⁵⁷ *Пальцев Б.В.* Асимптотика спектра интегральных операторов свертки на конечном интервале с однородными полярными ядрами // Известия РАН. Серия математическая. 2003. Т. 67. № 4. С. 67–154.

⁵⁸ *Безродных С.И., Власов В.И.* Сингулярная задача Римана — Гильберта в сложных областях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 12. С. 904–953.

⁵⁹ *Климентов С.Б.* Граничные свойства обобщенных аналитических функций. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.

⁶⁰ *Солдатов А.П.* К теории анизотропной плоской упругости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2016. Т. 60. С. 114–163.

⁶¹ *Безродных С.И.* Гипергеометрическая функция Лауричеллы $F(N)D$, задача Римана–Гильберта и некоторые приложения // УМН. 2018. Т. 73. № 6(444). С. 3–94.

⁶² *Кац Б.А., Кац Д.Б., Люй Ч.* Краевая задача Римана на круговых спиралях // Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62. № 3. С. 525–537.

⁶³ *Шабалин П.Л., Фаизов Р.Р.* Задача Римана с условием на вещественной оси для обобщенных аналитических функций с сингулярной линией // Сиб. матем. журн. 2023. Т. 64. № 2. С. 449–462.

⁶⁴ *Салимов Р.Б., Шабалин П.Л.* Краевая задача Гильберта теории аналитических функций и ее приложения. Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2005.

⁶⁵ *Обносков Ю.В.* Задача $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения для софокусного эллиптического кольца // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2008. Т. 150, кн. 4. С. 137–146.

⁶⁶ *Bezrodnykh S.I., Vlasov V.I.* Asymptotics of the Riemann–Hilbert Problem for the Somov Model of Magnetic Reconnection of Long Shock Waves // Math. Notes. 2021. V. 110. № 6. P. 853–871.

шения задачи Римана. Такая модификация осуществлена для построения решения задачи Римана, возникающей в связи с решением краевой задачи для линеаризованной системы Больцмана — Максвелла (1)–(5).

2. Цели диссертационной работы.

1. Построение методом Фурье аналитического решения во всей плоскости (x, v) для линеаризованной системы уравнений (1), (2), возникающей при моделировании возмущения слоя плазмы электрическим полем.

2. Вывод новых формул для прямого и обратного преобразования Фурье обобщенных функций специального вида, представимых в виде интегралов по параметру, необходимых для построения решения системы (1), (2).

3. Построение в аналитическом виде решения краевой задачи (1)–(5) на основе найденного в п. 1 представления для искомых функций $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$. Решение возникающего при таком подходе сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши путем сведения к задаче Римана.

3. Основные результаты диссертации.

1. Для линеаризованной системы уравнений Больцмана — Максвелла (1), (2), возникающей при моделировании возмущения слоя плазмы электрическим полем, с помощью метода преобразования Фурье построено аналитическое решение во всей плоскости (x, v) . При этом найдено аналитическое решение системы интегральных уравнений для образов Фурье искомых функций в пространстве обобщенных функций Z' .

2. Получены новые формулы для преобразования Фурье обобщенных функций, имеющих вид интегралов по параметру. Такие формулы применены в п. 1 для построения общего решения системы (1), (2) во всей плоскости (x, v) .

3. Построено решение краевой задачи (1)–(5) для линеаризованной системы уравнений Больцмана — Максвелла и решение возникающего при этом сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши и соответствующей задачи Римана сопряжения аналитических функций с помощью модификации представлений Ф.Д. Гахова и Н.И. Мусхелишвили.

4. Осуществлена численная реализация найденного в аналитическом виде электрического поля $\mathcal{E}(x)$ для случаев, когда невозмущенная плазма описывается функ-

цией Ферми — Дирака или функцией Максвелла. На этой основе исследована зависимость $\mathcal{E}(x)$ от частоты внешнего поля, частоты столкновений и выбора невозмущенной функции распределения.

4. Научная новизна работы заключается в следующем. Найденное интегральное представление для общего решения рассматриваемой системы двух интегро-дифференциальных уравнений (1), (2), справедливое во всей плоскости переменных (x, v) , является новым. При его построении с помощью метода преобразования Фурье в пространствах D' и Z' были получены новые формулы для прямого и обратного преобразования Фурье обобщенных функций специального класса, имеющих вид интегралов по параметру. Для решения в пространстве обобщенных функций Z' системы интегральных уравнений, возникающей при применении метода Фурье к системе (1), (2), были применены оригинальные приемы, позволившие найти образы Фурье искомых функций в замкнутом аналитическом виде. Решение краевой задачи (1)–(5) для системы интегро-дифференциальных уравнений, описывающей взаимодействие внешнего электрического поля с плазмой, является новым. Оно построено на основе указанного выше общего решения. При его построении соответствующее сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши решено с помощью модификации представления Ф.Д. Гахова — Н.И. Мусхелишвили для решения задачи Римана. Новой также является выполненная численная реализация построенного аналитического решения для электрического поля для случаев, когда невозмущенная плазма описывается функцией Максвелла или Ферми — Дирака, и исследование зависимости самосогласованного электрического поля в слое плазмы от частоты внешнего поля, частоты столкновений и выбора невозмущенной функции распределения.

5. Положения, выносимые на защиту.

1. Аналитическое решение линеаризованной системы Больцмана — Максвелла (1), (2) во всей плоскости (x, v) .

2. Формулы для обратного преобразования Фурье обобщенных функций из пространства Z' , имеющих вид интегралов по параметру.

3. Аналитическое решение краевой задачи (1)–(5) в полосе (4) на основе представления из п. 1. Решение соответствующего сингулярного интегрального уравнения и краевой задачи Римана.

4. Результаты численного исследования построенного аналитического решения для электрического поля для случаев, когда невозмущенная плазма описывается функцией Ферми — Дирака или Максвелла.

6. Используемые методы. Для решения поставленной задачи используются методы математической физики, применяемые для решения интегро-дифференциальных уравнений, теория обобщенных функций, теория сингулярных интегральных уравнений, методы комплексного анализа.

Основу применяемой математической модели составляет кинетическое уравнение Больцмана с интегралом столкновений, предложенным Бхатнагаром, Гроссом и Круком^{5,6,7}. Кинетическое уравнение дополняется уравнением Максвелла для электрического поля. После линеаризации такой системы, которую естественно называть системой Больцмана — Максвелла, и процедуры обезразмеривания с учетом естественных краевых условий на границе плазменного слоя, приходим к постановке задачи (1)–(5), которая является основной в диссертации. Система (1), (2) решена с помощью расширения области и применения комплексного преобразования Фурье. Такое преобразование Фурье рассматривается автором в пространствах D' и Z' обобщенных функций. При решении системы интегральных уравнений в Z' , к которой с помощью преобразования Фурье сводится система (1), (2) в $\mathbb{R}^2$, возникает дисперсионная функция $\Omega(z)$, от существования нулей которой зависит вид решения всей задачи (1)–(5). При применении к системе (1), (2) прямого и обратного преобразования Фурье использовались методы теории обобщенных функций^{13,14,15,16}, а также новые формулы для обратного преобразования Фурье от обобщенных функций, имеющих вид интегралов по параметру. Такие формулы были найдены с помощью развития подходов, приведенных в указанных монографиях.

Для решения краевой задачи (1)–(5) в полосе применено найденное в диссертации интегральное представление решения системы (1), (2) в плоскости $\mathbb{R}^2$. Для нахождения неизвестной плотности в таком представлении выписано сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши. Решение этого уравнения найдено путем сведения к задаче Римана на вещественной прямой и применения модификации метода Ф.Д. Гахова и Н.И. Мухелишвили.

Для нахождения комплексных корней дисперсионной функции $\Omega(z)$ использовался численный метод Ньютона. Начальное приближение находилось на основе построенного явного интегрального представления для таких корней. Вывод этой формулы осуществлен с помощью альтернативного представления дисперсионной функции, полученного как решение задачи Римана с условием сопряжения на вещественной оси.

7. Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием строго обоснованных методов современной математической физики, теории функций комплексного переменного, а также теории краевых задач для аналитических функций, включая метод сингулярных интегральных уравнений и теорию обобщенных функций. В работе представлены подробные доказательства сформулированных теорем и приведен полный вывод решения краевой задачи (1)–(5). Применяемая математическая модель разработана на основе известных положений теоретической физики, физики плазмы, физики твердого тела, базовых положений кинетической теории и электродинамики^{6,7,9,12}.

Положения и выводы диссертационной работы находятся в соответствии с современными представлениями теории дифференциальных и интегральных уравнений, математической и теоретической физики, а также физики твердого тела и физики плазмы.

8. Теоретическая и практическая значимость. Построенное замкнутое аналитическое решение линеаризованной системы уравнений Больцмана — Максвелла (1), (2) значимо для развития конструктивных методов решения интегро-дифференциальных уравнений и их приложений к задачам физики плазмы. Найденные при построении такого решения новые формулы для преобразования Фурье обобщенных функций могут быть применены для достаточно широкого класса задач математической физики. Использованная при решении краевой задачи (1)–(5) модификация метода Ф.Д. Гахова — Н.И. Мусхелишвили может быть применена к сингулярным интегральным уравнениям с неклассическими данными и задаче Римана с растущей правой частью. Построенное аналитическое решение задачи (1)–(5) может быть использовано для верификации численных методов. Постановка задачи (1)–(5) предпо-

лагает весьма общий вид невозмущенных функций распределения, например функции Максвелла и Ферми — Дирака. В связи с этим результаты работы могут быть применены к широкому кругу задач, возникающих при изучении явлений в полупроводниках, металлах и других средах.

9. Вклад соискателя. Личное участие соискателя в получении результатов, изложенных в диссертации, состоит в получении решения рассматриваемой системы интегро-дифференциальных уравнений, выведении новых формул для прямого и обратного преобразования Фурье введенных обобщенных функций, численной реализации построенного аналитического представления электрического поля и исследование его зависимости от параметров задачи. Решение задачи Римана, возникающей при решении сингулярного интегрального уравнения, получено совместно с научным руководителем.

10. Публикации. По теме диссертации опубликован ряд статей и материалов конференций. Основные результаты работы отражены в 8 статьях, 7 из которых напечатаны в журналах, рекомендованных ВАК. Также опубликованы тезисы в трудах международных и всероссийских конференций.

11. Апробация работы. Результаты диссертации были доложены на следующих научных семинарах:

1) Семинар отдела механики, Москва, МИАН, 2024 г. (руководители: академик РАН, д.ф.-м.н., проф. В.В. Козлов, академик РАН, д.ф.-м.н., проф. Д.В. Трещев, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., проф. С.В. Болотин).

1) Семинар «Методы решения задач математической физики», Москва, ФИЦ ИУ РАН, 2024 г. (руководители: академик РАН, д.ф.-м.н., проф. Ю.Г. Евтушенко, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н. С.И. Безродных, д.ф.-м.н. В.И. Власов, д.ф.-м.н., проф. С.Я. Степанов).

2) Семинар «Асимптотические методы в математической физике», Москва, ИПМех РАН, 2024 г. (руководитель д.ф.-м.н., проф. С.Ю. Доброхотов).

3) Семинар «Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения», Москва, Математический институт им. С.М. Никольского РУДН, 2024 г. (руководитель д.ф.-м.н., проф. А.Л. Скубачевский).

4) Семинар лаборатории теории плазменных явлений, Москва, Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 2019 г. (руководитель д.ф.-м.н., проф. С.А. Урюпин).

5) Семинар им. А.А. Рухадзе Теоретического отдела ИОФ РАН, Москва, Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, 2019 г. (руководитель д.ф.-м.н., проф. Н.Г. Гусейн-заде).

6) Межкафедральный научный семинар по физике физико-математического факультета Московского государственного областного университета (МГОУ), Москва, МГОУ, 2019 г. (руководитель д.ф.-м.н., проф. Э.В. Геворкян).

Полученные результаты были представлены на всероссийских и международных конференциях:

1) Международная конференция «Математическое моделирование, численные методы и инженерное программное обеспечение». Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 11–12 декабря 2023 г.;

2) Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики». Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 5–8 декабря 2023 г.;

3) III International Conference “Mathematical Physics, Dynamical Systems, Infinite-Dimensional Analysis”. Moscow Region, Dolgoprudny, MPTI, July 5–13, 2023;

4) Международная конференция «Математические методы механики. К 90-летию юбилею академика РАН А.Г. Куликовского». Москва, МИАН, 20–24 марта 2023 г.;

5) VIII Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики». Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 6–9 декабря 2022 г.;

6) V Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования». Москва, МИАН, 27–30 июня 2022 г.;

7) IV Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования». Москва — Якутск, МИАН, 19–21 июня 2019 г.;

8) 10-я Всероссийская конференция «Необратимые процессы в природе и технике». Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 29–31 января 2019 г.;

9) Международная конференция «Физические свойства материалов и дисперсных сред для элементов информационных систем, наноэлектронных приборов и экологических технологий». Москва, МГОУ, 17 апреля 2018 г.;

10) Международная междисциплинарная конференция «Эйлеровы чтения». Москва, МГОУ, 22–24 ноября 2017 г.;

11) Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды». Москва, МИАН, 13–15 ноября 2017 г.;

12) Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики». Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 24–27 октября 2017 г.

12. Структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Объем работы составляет 138 страниц, включая 42 рисунка. Список литературы содержит 163 наименования.

Обзор содержания диссертации

Во **введении** к диссертации дана общая характеристика работы, отмечена актуальность темы и степень ее разработанности, указаны цели, результаты, положения, выносимые на защиту, и научная новизна работы, обозначены используемые методы и достоверность полученных результатов, приведены сведения об апробации работы и кратко изложено содержание.

В **главе 1** приведен вывод постановки задачи (1)–(5) на основе используемой математической модели^{4,6,7,12} отклика плазмы на внешнее электрическое поле. Рассмотрены два случая: 1) плазма с произвольной степенью вырождения, для которой в невозмущенном состоянии справедлива статистика Ферми — Дирака, и 2) классическая плазма, невозмущенное состояние которой подчиняется распределению Максвелла.

Глава 2 посвящена построению общего решения системы интегро-дифференциальных уравнений (1), (2) во всей плоскости $\mathbb{R}^2$, т.е. без учета краевых условий (3) на границе полосы (4). Для этого применяется метод преобразования Фурье, а искомые функции $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$ рассматриваются в пространстве обобщенных функций D' . В § 2 приведены необходимые сведения о пространствах D' и Z' обобщенных функций. Теоремы 2.1–2.3 посвящены исследованию свойств обобщенных функций, имеющих вид интеграла по параметру, а также построению преобразования Фурье таких функций.

В § 3 осуществлено применение преобразования Фурье к системе (1), (2) и ее сведение к системе интегральных уравнений относительно образов Фурье $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v)$ и $\widehat{\mathcal{E}}(\zeta)$. Решение этой системы дано в теореме 2.4 (см. стр. 63 диссертации), согласно которой функции $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v)$ и $\widehat{\mathcal{E}}(\zeta)$ в пространстве Z' имеют следующий вид:

$$\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v) = \left(\frac{Q_0}{\Delta(\zeta)} \delta(\zeta) - \frac{B}{i\zeta} \widehat{\mathcal{N}}(\zeta) - \frac{B}{i\zeta \Delta_0(\zeta)} \widehat{\mathcal{J}}(\zeta) \right) V(\zeta, v) + Q(v) \delta(A - i\zeta v), \quad (7)$$

$$\widehat{\mathcal{E}}(\zeta) = \frac{Q_0}{\Delta(\zeta)} \delta(\zeta) - \frac{B}{i\zeta} \widehat{\mathcal{N}}(\zeta) - \frac{B}{i\zeta \Delta_0(\zeta)} \widehat{\mathcal{J}}(\zeta), \quad (8)$$

где

$$\Delta(\zeta) = 1 + \frac{B}{i\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s - i\zeta/B}{A - i\zeta s} k(s) ds, \quad \Delta_0(\zeta) = 1 + \frac{B}{i\zeta} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s - i\zeta/B}{A - i\zeta s} k(s) ds,$$

$$V(\zeta, v) = \frac{v - i\zeta/B}{A - i\zeta v},$$

$$\widehat{\mathcal{J}}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(s) k(s) \delta(A - i\zeta s) ds, \quad \widehat{\mathcal{N}}(\zeta) = \sum_{k=1}^m \sum_{r=0}^{n_k-1} Q_{kr} \delta^{(r)}(\zeta - \zeta_k);$$

здесь ζ_k — нули порядка n_k функции $\Delta(\zeta)$ (такие, что $\zeta_k \neq 0$ и $\zeta_k \neq A/iv$), Q_0, Q_{kr} — свободные константы, $Q(v)$ — произвольная функция, удовлетворяющая специальным условиям при $v \rightarrow 0$ и $v \rightarrow \pm\infty$ (см. стр. 49 диссертации), функция $k(s)$ удовлетворяет условию (5), а также $k(s) = k(-s)$ и $k(s) = \mathcal{O}(e^{-as^2})$, $a > 0$ при $s \rightarrow \pm\infty$.

В теореме 2.5 дан общий вид решения системы (1), (2), полученный путем применения обратного преобразования Фурье (6) к функциям (7), (8), см. стр. 69 диссертации. Согласно этой теореме решение системы (1), (2), (5) с условиями на функцию $k(s)$: $k(s) = k(-s)$ и $k(s) = \mathcal{O}(e^{-as^2})$ при $s \rightarrow \pm\infty$, $a > 0$, в плоскости $\mathbb{R}^2$ имеет вид:

$$\mathcal{F}(x, v) = \frac{Q_0 v}{A \Omega_{\infty}} + \mathcal{N}_{\mathcal{F}}(x, v) + \frac{B}{iA} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda) k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \varkappa(\lambda, v) e^{-Ax/\lambda} d\lambda - \frac{Q(v)}{iv} e^{-Ax/v}, \quad (9)$$

$$\mathcal{E}(x) = \frac{Q_0}{\Omega_{\infty}} + \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(x) + \frac{B}{iA} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda) k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} e^{-Ax/\lambda} d\lambda, \quad (10)$$

где

$$\Omega(\lambda) = \Delta(A/i\lambda), \quad \Omega_{\infty} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Omega(\lambda),$$

$$\Omega_0(\lambda) = 1 - \frac{B}{A^2} \lambda^2 - \frac{B}{A^2} \lambda \left(\lambda^2 - \frac{A}{B} \right) \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k(s)}{s - \lambda} ds,$$

$$\begin{aligned}\varkappa(\lambda, v) &= \frac{1}{A} \left(\frac{\lambda^2 - A/B}{\lambda - v} - \lambda \right), \\ \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(x) &= -\frac{B}{A} \cdot \sum_{k=1}^m \sum_{r=0}^{n_k-1} Q_{kr} \lambda_k (ix)^r e^{-Ax/\lambda_k}, \\ \mathcal{N}_{\mathcal{F}}(x, v) &= -\frac{B}{A} \cdot \sum_{k=1}^m \sum_{r=0}^{n_k-1} Q_{kr} \lambda_k \varkappa(\lambda_k, v) (ix)^r e^{-Ax/\lambda_k},\end{aligned}$$

здесь λ_k — нули функции $\Omega(\lambda)$ порядка n_k , причем $\lambda_k \notin \mathbb{R}$, Q_0, Q_{kr} — свободные константы, $Q(v)$ — произвольная функция, удовлетворяющая специальным условиям при $v \rightarrow 0$ и $v \rightarrow \pm\infty$ (см. стр. 49 диссертации). Отметим, что слагаемые $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(x, v)$ и $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(x)$ присутствуют в представлениях (9), (10) только если у функции $\Omega(\lambda) = \Delta(A/i\lambda)$ существуют корни, а их вид зависит от количества и кратности этих корней.

Глава 3 посвящена решению краевой задачи (1)–(5). Параграфы 1, 2 содержат вводные замечания и необходимые сведения о задаче Римана, а также о методе Ф.Д. Гахова и Н.И. Мусхелишвили.

В § 3 для двух рассматриваемых типов плазмы исследуется так называемая “дисперсионная функция” $\Omega^{\pm}(\lambda) = \Delta^{\pm}(A/i\lambda)$, для которой справедлива формула

$$\Omega^{\pm}(\lambda) = 1 - \frac{B}{A^2} \lambda^2 - \frac{B}{A^2} \lambda \left(\lambda^2 - \frac{A}{B} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k(s) ds}{s - \lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{H}^{\pm}. \quad (11)$$

С помощью вычислительных экспериментов на основании принципа аргумента установлено, что она может иметь не более двух комплексных нулей. Определены диапазоны физических параметров задачи, в которых существуют нули $\pm\lambda_0$ функции $\Omega(\lambda)$, а также диапазоны, когда $\Omega(\lambda)$ не имеет корней. Затем при условии, что корень λ_0 существует, для этой величины получено замкнутое аналитическое выражение.

В § 4 получено решение краевой задачи (1)–(5) для двух случаев: когда дисперсионная функция не обращается в нуль и когда дисперсионная функция имеет два простых корня (см. теоремы 3.9 и 3.12). В каждом из случаев применено аналитическое представление для решения системы (1), (2), (5) при $(x, v) \in \mathbb{R}^2$, полученное в главе 2, а краевая задача (1)–(5), поставленная в полосе, с помощью этого представления сведена к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши. Такое

уравнение решено при помощи сведения к задаче Римана и применения модификации метода Гахова — Мусхелишвили. Определены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Римана, доказаны утверждения о существовании и единственности решения сингулярного интегрального уравнения, даны представления для его решения, см. теоремы 3.7, 3.8 для случая, когда дисперсионная функция не обращается в нуль, и теоремы 3.10, 3.11 для случая, когда дисперсионная функция имеет два простых корня.

Приведем представления для функций $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$, являющихся решением краевой задачи (1)–(5) в случае, когда дисперсионная функция $\Omega(z)$ имеет два простых корня, равных $\pm\lambda_0$ (см. теорему 3.12, стр. 104 диссертации):

$$\mathcal{F}(x, v) = Q_0 \left(\frac{v}{A\Omega_\infty} - \frac{\lambda_0 \varkappa(\lambda_0, v) e^{-Ax/\lambda_0} - \lambda_0 \varkappa(-\lambda_0, v) e^{Ax/\lambda_0}}{\Omega'(\lambda_0) \operatorname{ch}(Al/\lambda_0) (\lambda_0^2 - A/B)} + \right. \\ \left. + \frac{B}{A^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 k(\lambda) \varkappa(\lambda, v) e^{-Ax/\lambda} d\lambda}{\operatorname{ch}(Al/\lambda) \Omega^+(\lambda) \Omega^-(\lambda)} - \frac{v \Omega_0(v) e^{-Ax/v}}{A \operatorname{ch}(Al/v) \Omega^+(v) \Omega^-(v)} \right), \quad (12)$$

$$\mathcal{E}(x) = Q_0 \left(\frac{1}{\Omega_\infty} - \frac{2\lambda_0 \operatorname{ch}(Ax/\lambda_0)}{\Omega'(\lambda_0) \operatorname{ch}(Al/\lambda_0) (\lambda_0^2 - A/B)} + \frac{B}{A^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 k(\lambda) e^{-Ax/\lambda} d\lambda}{\operatorname{ch}(Al/\lambda) \Omega^+(\lambda) \Omega^-(\lambda)} \right), \quad (13)$$

здесь константа Q_0 вычисляется по формуле

$$Q_0 = \left(\frac{1}{\Omega_\infty} - \frac{2\lambda_0}{\Omega'(\lambda_0) (\lambda_0^2 - A/B)} + \frac{B}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2 k(\lambda) d\lambda}{\Omega^+(\lambda) \Omega^-(\lambda)} \right)^{-1}. \quad (14)$$

Приведем еще выражение для функции $Q(v)$, которая была найдена в результате решения сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши:

$$Q(v) = \frac{iQ_0 v^2 \Omega_0(v)}{A \operatorname{ch}(Al/v) \Omega^+(v) \Omega^-(v)}. \quad (15)$$

Отметим, что при подставке (15) в (9), (10) приходим к выражениям (12), (13).

Глава 4 посвящена численной реализации аналитического представления (13) для электрического поля $\mathcal{E}(x)$, построенного в главах 2, 3, и исследованию его зависимости от параметров задачи.

В § 1 описан алгоритм, применяемый для численной реализации. В § 2 и § 3 представлены результаты вычисления электрического поля для случаев, когда невозмущенная функция распределения совпадает с распределением Максвелла и Ферми —

Дирака соответственно. Проведено исследование зависимости решения от параметров задачи, которыми являются частота столкновений в плазме и частота внешнего электрического поля, а в случае распределения Ферми — Дирака — еще и химический потенциал. Раскрывая в формуле (13) скобки, представим электрическое поле $\mathcal{E}(x)$ в виде суммы

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_a + \mathcal{E}_b(x) + \mathcal{E}_c(x),$$

где $\mathcal{E}_a$ — постоянная величина, а $\mathcal{E}_b(x)$ и $\mathcal{E}_c(x)$ — величины, пропорциональные $\text{ch}(Ax/\lambda_0)$ и интегралу по $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ соответственно. Напомним, что слагаемое $\mathcal{E}_b(x)$ присутствует в решении только при тех значениях параметров задачи (1)–(5), при которых у дисперсионной функции $\Omega(\lambda)$ существуют нули.

В результате проведенных вычислений были сделаны следующие выводы. При малых значениях частоты внешнего поля ω наибольший вклад в $\mathcal{E}(x)$ дает слагаемое $\mathcal{E}_b(x)$, которое демонстрирует ярко выраженный погранслоиный эффект. При значениях ω , близких к плазменной частоте ω_p , происходит резкий рост решения, абсолютная величина самосогласованного поля внутри слоя на порядки больше ее значения на границе. При частотах ω , превышающих плазменную частоту ω_p , в слое возникают осцилляции по координате, которые при дальнейшем росте частоты ω постепенно исчезают. При изменении значения частоты столкновений в плазме ν поведение $\mathcal{E}(x)$ сохраняет качественные характеристики, но можно заметить, что с увеличением ν увеличивается пограничный слой и уменьшается число осцилляций по координате. Для вырожденной плазмы при разных значениях химического потенциала α также сохраняются качественные эффекты, увеличение значения α приводит к увеличению пограничного слоя и уменьшению числа осцилляций по координате.

В заключении излагаются итоги выполненного исследования, отмечена их востребованность и указаны перспективы дальнейшего развития темы.

Список публикаций по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК

1. *Gordeeva N.M.* Calculating a Perturbation of a Plasma Layer by an Electric Field // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2024. V. 64. № 3. P. 465–479.
2. *Bezrodnykh S.I., Gordeeva N.M.* Analytic Solution of the System of Integro–Differential Equations for the Plasma Model in an External Field // Russian Journal of Mathematical Physics. 2023. V. 30. № 4. P. 443–452.
3. *Bezrodnykh S.I., Gordeeva N.M.* Solution of a Boundary Value Problem for a System of Integro–Differential Equations Arising in a Modal of Plasma Physics // Mathematical Notes. 2023. V. 114. № 5. P. 704–715.
4. *Гордеева Н.М., Юшканов А.А.* Невырожденная электронная плазма в слое во внешнем электрическом поле с зеркальным условием на границе // Теплофизика высоких температур. 2018. Т. 56. № 5. С. 687–695.
5. *Гордеева Н.М., Юшканов А.А.* Особенности поведения моды Дебая в электронной плазме при различных степенях вырождения электронного газа // Письма в Журнал технической физики. 2018. Т. 44. № 24. С. 143–149.
6. *Гордеева Н.М., Латышев А.В.* Задача о колебаниях в канале плазмы с произвольной степенью вырождения электронного газа // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 3 (78). С. 97–103.
7. *Латышев А.В., Гордеева Н.М.* Поведение плазмы с произвольной степенью вырождения электронного газа в слое проводящей среды // Теоретическая и математическая физика. 2017. Т. 192. № 3. С. 506–522.

Статьи в прочих изданиях

8. *Гордеева Н.М.* Колебательные процессы в электронной плазме с произвольной степенью вырождения // Инженерный журнал: наука и инновации. 2018. № 8 (80). С. 1–13.

Тезисы конференций

9. *Bezrodnykh S.I., Gordeeva N.M.* Solution of a non-local boundary value problem simulating plasma perturbation by an electric field // Book of Abstracts III International Conference “Mathematical Physics, Dynamical Systems, Infinite-Dimensional Analysis”, dedicated to the 100th anniversary of V.S. Vladimirov, the 100th anniversary of L.D. Kudryavtsev and the 85th anniversary of O.G. Smolyanov. July 5–13, 2023. Moscow Region, Dolgoprudny. P. 31–33.

10. *Безродных С.И., Гордеева Н.М.* Решение задачи Римана, возникающей при моделировании возмущении плазмы электрическим полем // Математические методы механики: тезисы докладов конференции. Под ред. А.Т. Ильичева. Москва, 2023. С. 11–12.

11. *Безродных С.И., Гордеева Н.М.* Аналитическое решение системы интегродифференциальных уравнений для модели плазмы во внешнем поле // Суперкомпьютерные технологии математического моделирования: тезисы докладов V международной конференции. Под ред. В.И. Васильева. Якутск, 2022. С. 28.

12. *Гордеева Н.М.* Математическое моделирование поведения плазмы в слое // Суперкомпьютерные технологии математического моделирования: тезисы докладов IV международной конференции / Под ред. В.И. Васильева. Якутск: Издательский дом СВФУ, 2019. С. 21.

13. *Gordeeva N.M., Yushkanov A.A.* The Search Algorithm for Discrete Mode of Electron Plasma/ Journal of Physics: Conference Series. 4th International Conference on Supercomputer Technologies of Mathematical Modelling, SCTeMM 2019. 2019. С. 012007.

14. *Гордеева Н.М., Юшканов А.А.* Дебаевское экранирование в сильно вырожденной плазме // Материалы 10-й Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике», часть 1. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019. С. 245–248.

15. *Gordeeva N.M., Yushkanov A.A.* On Some Peculiarity in Behavior of Plasma with an Arbitrary Degree of Degeneracy of Electron Gas in Thin Layer// Journal of Physics: Conference Series. 10th All-Russian Conference on Irreversible Processes in Nature and Technology. 2019. P. 012044.

16. *Gordeeva N.M., Yushkanov A.A.* On behavior peculiarity of electron plasma // International Interdisciplinary Conference "Euler Readings MRSU 2017". 22–24 November 2017, Moscow Region State University (MRSU), Russian Federation. Journal of Physics: Conf. Series. 2018. V. 996. P. 012009.

17. *Гордеева Н.М., Юшканов А.А.* Поведение моды Дебая электронной плазмы в зависимости от параметров задачи // В сборнике: Физические свойства материалов и дисперсных сред для элементов информационных систем, нанoeлектронных приборов и экологичных технологий. Сборник трудов международной конференции. Главный редактор В.В. Беляев. Под ред. Е.А. Бедриковой. 2018. С. 148–151.

18. *Гордеева Н.М., Юшканов А.А.* Влияние параметров плазмы на дебаевское экранирование // Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», посвященная памяти академика Леонида Ивановича Седова в связи со столетием со дня его рождения, Москва, 13–15 ноября 2017 г. Тезисы докладов. С. 86–89.

19. *Гордеева Н.М.* Задача о колебаниях плазмы с конечной температурой // Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», посвященная 170-летию со дня рождения великого русского ученого Николая Егоровича Жуковского, Москва, 24–27 октября 2017 г. Тезисы докладов. С. 183–184.