

УТВЕРЖДАЮ



директор Математического ин-та
им. В.А. Стеклова РАН
академик РАН Д.В. Трещев

Отзыв ведущей организации на диссертацию
НАДЕЖДЫ МИХАЙЛОВНЫ ГОРДЕЕВОЙ
«Краевая задача для системы интегро-дифференциальных
уравнений, возникающая в физике плазмы»
на соискание ученой степени кандидата физико-математических
наук по специальности 1.1.2 – дифференциальные уравнения и
математическая физика

Методы решения начально-краевых задач, возникающих при математическом моделировании взаимодействия плазмы с электромагнитным полем, представляют собой несомненный теоретический и практический интерес. С точки зрения теории, подобные методы служат развитию инструментов современной математической физики и теории дифференциальных уравнений. Решения, получаемые в результате применения упомянутых методов, играют очень важную роль в задачах физики и астрофизики, относящихся, например, к удержанию плазмы магнитным полем и к описанию аккреции плазмы на звезду-партнер пульсара, а также в чисто прикладных проблемах, в частности, связанных с конструированием и созданием микроэлектронных приборов. При этом, построение аналитических решений имеет очевидные преимущества по сравнению с численным решением модельных уравнений.

В настоящей диссертации в замкнутом аналитическом виде строятся решения краевой задачи для системы из двух интегро-дифференциальных уравнений, которая моделирует возмущение слоя плазмы электрическим полем в рамках описания уравнениями Больцмана – Максвелла. Решение найдено при помощи новых формул для преобразования Фурье регулярных функционалов, а также новых результатов для задачи Римана сопряженных аналитических функций. При этом, неизвестные функции рассматриваются как регулярные линейные непрерывные функционалы над пространством

бесконечно дифференцируемых финитных функций. Это связано с тем обстоятельством, что эти функции не принадлежат пространству квадратично интегрируемых функций на действительной оси, а значит, преобразование Фурье от них, в общем случае, представляет собой обобщенную функцию. Задача решена вначале на плоскости пространственной координаты x и скорости v , а затем сужена на полосу, где координата x изменяется на симметричном отрезке $[-l, l]$.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

Во **введении** дается общая характеристика работы, краткий обзор решения задач физики плазмы, в том числе и задач об отклике плазмы на внешнее электромагнитное возмущение, задач применения интегральных преобразований обобщенных функций и теории линейного сопряжения аналитических функций, указаны положения, выносимые на защиту, и кратко изложено содержание работы.

В **первой главе** выведены уравнения, где в качестве равновесной функции распределения используется функция Ферми — Дирака или Максвелла. Независимо от указанных функций распределения, задача описывается одной и той же системой линеаризованных интегродифференциальных уравнений (являющихся следствиями уравнений Больцмана — Максвелла) и краевых условий. Неизвестными в этой задаче являются безразмерные функции напряженности внешнего электрического поля и коэффициент отклонения искомой функции распределения от невозмущенной функции распределения. Безразмерный коэффициент отклонения зависит от пространственной переменной x и скорости электронов v , а безразмерная электрическая напряженность только от x . В силу одномерности задачи внешнее магнитное поле равно нулю. Краевые условия выставляются для коэффициента отклонения на границах $x=-l$ и $x=l$ бесконечной полосы в (x,v) -плоскости, а для электрической напряженности — на границах соответствующего отрезка $[-l, l]$.

Во **второй главе** найдено решение искомой системы интегродифференциальных уравнений во всей (x,v) -плоскости независимых переменных. Для построения этого решения используется преобразование Фурье по переменной x , а скорость v рассматривается как параметр. При этом, пара искомых неизвестных функций отождествляется с регулярными функционалами из соответствующего пространства над пространством D финитных бесконечно дифференцируемых функций. Образы Фурье этих функций являются элементами пространства линейных функционалов над пространством Z образов Фурье финитных бесконечно дифференцируемых

функций. В результате применения преобразования Фурье исходная система интегро-дифференциальных уравнений трансформируется в систему интегральных уравнений относительно образов Фурье неизвестных функций. Решение этой системы находится в явном виде. Вычисление обратного преобразования Фурье дает общее решение искомой системы в явном виде. В данной главе отмечается, что пространства всех линейных функционалов над D (не обязательно регулярных) изоморфно пространству линейных функционалов над Z ; при этом регулярным функционалы над D могут отображаться в сингулярные функционалы над Z , что и происходит в действительности. Решение полученной системы интегральных уравнений представляет собой выражение в виде сингулярных функционалов над Z с неизвестными постоянными и функцией от скорости v . Для получения искомого решения вычисляется обратное преобразование Фурье от выражения для образов Фурье. Полученное решение в (x, v) -плоскости является непрерывно дифференцируемой функцией (однако не квадратично-интегрируемой на всей оси x и потому интерпретируется как регулярный функционал над D). Полученное решение зависит от конечного набора произвольных постоянных и произвольной функции $Q(v)$, которые должны быть определены при сведении упомянутого решения на полосу (x, v) -плоскости и учета краевых условий на границе этой полосы.

В **третьей главе** определяются константы и неизвестная функция, входящие в решение, полученное во второй главе. При подстановке этих решений в краевые условия на границах ранее упомянутой полосы в (x, v) -плоскости возникает сингулярное интегральное уравнение на вещественной прямой относительно функции $Q(v)$. При этом, произвольные постоянные, входящие в решение главы 2, также определяются. Это интегральное уравнение сведено к задаче сопряжения Римана на вещественной оси, решение которой получено в явном виде с помощью модификаций ранее известных методов. При этом рассматриваются два случая: когда дисперсионная функция, определенная в главе 2 имеет два простых нуля и ни одного нуля (в зависимости от частоты внешнего поля). Следует отметить, что дисперсионная функция может иметь не более двух нулей, что показано в данной главе с помощью вычислительных экспериментов на основании принципа аргумента. В выражение для неизвестных функций входят квадратуры, определяемые несобственными интегралами от функций, связанных с невозмущенной функцией распределения.

В **четвертой главе** при помощи численных методов исследуется решение для напряженности внешнего электрического поля в зависимости от частоты этого поля и физических параметров плазмы. Делается заключение о

том, что при малых частотах электрического поля наиболее выражен пограничный эффект. При возрастании частоты внешнего поля происходит перераспределение электрического поля внутри слоя, занимаемого плазмой. При частотах, превышающих лэнгмюровскую частоту, возникают осцилляции по координате x , которые при дальнейшем росте частоты поля исчезают. При изменении частоты столкновений и химического потенциала, указанные эффекты качественно сохраняются.

Специального упоминания заслуживают следующие результаты, полученные в диссертации.

1. Для линеаризованной системы уравнений Больцмана – Максвелла, которые описывают возмущения плазмы внешним электрическим полем, построено (при помощи применения преобразования Фурье в нестандартных пространствах) явное решение для безразмерного электрического поля и безразмерного отклонения функции распределения от невозмущенной функции распределения во всей плоскости переменных (x, v) .

2. Решение краевой задачи в полосе на (x, v) -плоскости для упомянутых функций, при использовании решения во всей плоскости, сведено к решению сингулярного интегрального уравнения, которое, в свою очередь, сведено к решению задачи сопряжения Римана на вещественной оси. Последняя задача решена в явном виде. Получено два разных решения в зависимости от наличия/отсутствия нулей дисперсионной функции.

3. Проведено численное исследование решения для напряженности внешнего электрического поля в зависимости от частоты этого поля и физических параметров плазмы. Определено поведение внешнего электрического поля в слое плазмы в зависимости от этих параметров.

Результаты диссертации являются достоверными и полностью обоснованными, так как при их получении использовались точные теоретические методы математической физики, теории функций комплексного переменного, а также теории обобщенных функций и краевых задач для аналитических функций. Все декларированные в диссертации результаты являются новыми и представляющими значительный интерес. Особенно стоит отметить решение краевой задачи в полосе на (x, v) -плоскости, занятой плазмой во внешнем электрическом поле: редукция ее к сингулярному интегральному уравнению и последующее сведение этого уравнения к задаче Римана на вещественной оси в комплексной плоскости.

Диссертация написана ясным и доступным языком, результаты изложены понятно. К возможным недостаткам работы можно отнести следующие.

1. В диссертации рассмотрена одномерная задача, в результате чего внешнее магнитное поле равно нулю. Сама по себе эта задача достаточно сложна, в частности, с описательной точки зрения, а ее решение вполне заслуживает быть предметом исследования для автора, претендующего на получение квалификации кандидата физико-математических наук. Тем не менее, хотелось бы включить внешнее магнитное поле в рассмотрение, что ведет к появлению существенных дополнительных пространственных измерений.

2. В главе 3 диссертации (см. теоремы 3.9 и 3.12 на стр. 94 и 104 диссертации) предъявляется решение рассматриваемой краевой задачи в явном виде, тем самым, снимается вопрос о существовании решений упомянутой задачи. Конечно, единственность решения очевидно следует из его построения (единственности решения задачи Римана, см. теоремы 3.7 и 3.10), однако это обстоятельство следовало бы прокомментировать в диссертации (справедливости ради следует заметить, что на стр. 18 автореферата говорится о единственности решения).

3. В главе 2 и 3 анализу рассматриваемой задачи предпослано достаточно подробное введение в теорию обобщенных функций и краевых задач, соответственно. У нас нет уверенности, что такое описание необходимо в квалификационной работе.

Первое из указанных замечаний носит рекомендательный характер о том, как продолжить исследования, приведенные в диссертации. Остальные замечания, ни в коей мере, не меняют результатов и никак не влияют на высокую оценку диссертации в целом.

Диссертация Н.М. Гордеевой на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук представляет собой законченное научное исследование, является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, которые можно квалифицировать как научное достижение. В диссертации получен целый ряд новых результатов. Результаты интересны и представляются важными, в первую очередь для теоретических вопросов, связанных с исследованием линейных интегро-дифференциальных уравнений проблем физики плазмы и ряда вопросов теории плазмы, а также для приложений в физике плазмы.

Результаты диссертации могут найти применение в работе, например, следующих организаций: МГУ имени М.В. Ломоносова, Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН и Институте проблем механики

им. А.Ю. Ишлинского РАН.

Из диссертационной работы, автореферата и опубликованных научных работ Н.М. Гордеевой (7 из них вышли в ведущих рецензируемых журналах и изданиях, рекомендованных Перечнем ВАК РФ для публикаций кандидатских диссертаций) следует, что диссертация *«Краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений, возникающая в физике плазмы»* соответствует требованиям ВАК России, предъявляемым к кандидатским диссертациям, установленным в главе II Положения о порядке присуждения учёных степеней, утвержденного Постановлением Правительства Российской Федерации № 842 от 24.09.2013 г. Автореферат полностью отражает содержание диссертации. Название работы соответствует проведенному исследованию. Публикации по теме работы содержат описание примененной методики исследования и отражают основные полученные результаты, а Н.М. Гордеева, безусловно, заслуживает присвоения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «1.1.2 – дифференциальные уравнения и математическая физика».

Настоящий отзыв утвержден на заседании отдела механики Математического института им. В. А. Стеклова РАН 26 августа 2024 года.

30 августа 2024 г.

Заведующий отделом механики

Математического института имени В.А. Стеклова РАН

(119991, Москва, ул. Губкина, д. 8, тел. +7(495) 984-81-41,

web-сайт www.mi.ras.ru)

доктор физико-математических наук, профессор, чл.-корр. РАН

(тел. +7 (495) 984 81 41 * 39 77, 35 44, e-mail: bolotin@mi-ras.ru)

С.В. Болотин

Подпись С.В. Болотина заверяю:

Зав. отделом кадров Математического института

имени В.А. Стеклова РАН



ПОДПИСЬ ЗАВЕРЯЮ
ВЕДУЩИЙ СПЕЦИАЛИСТ
О.О. ТИТОВА