

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН)

На правах рукописи



ГОРДЕЕВА Надежда Михайловна

**Краевая задача для системы
интегро–дифференциальных уравнений,
возникающая в физике плазмы**

1.1.2 — *дифференциальные уравнения и математическая физика*

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
д.ф.–м.н., чл.–корр. РАН
Безродных Сергей Игоревич

Москва 2024

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Математическая модель воздействия электрического поля на слой плазмы	19
§1. Вводные замечания	19
§2. Уравнения Больцмана — Максвелла	22
§3. Линеаризованная система интегро-дифференциальных уравнений Больцмана — Максвелла для случая равновесного распределения Ферми — Дирака	23
§4. Линеаризованная система интегро-дифференциальных уравнений Больцмана — Максвелла для случая равновесного распределения Максвелла	28
Глава 2. Общее решение линеаризованной системы Больцмана — Максвелла	33
§1. Вводные замечания	33
§2. Преобразование Фурье комплексных сингулярных обобщенных функций специального вида	34
2.1. Пространство D основных функций и пространство D' обобщенных функций	34
2.2. Пространства Z и Z' образов Фурье пространств D и D'	39
2.3. Обратное преобразование Фурье некоторых обобщенных функций из Z' ...	45
§3. Общее решение системы интегро-дифференциальных уравнений	56
3.1. Краевая задача для $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$ и переход к обобщенным функциям	56
3.2. Решение задачи для образов Фурье $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v)$, $\widehat{\mathcal{E}}(\zeta)$	58
3.3. Нахождение обратного преобразования Фурье для $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v)$, $\widehat{\mathcal{E}}(\zeta)$	65
3.4. Представление решения системы интегро-дифференциальных уравнений	68
Глава 3. Решение краевой задачи для линеаризованной системы Больцмана — Максвелла	70
§1. Вводные замечания	70
§2. Сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши и задача Римана	71
2.1. Сингулярные интегральные уравнения	71
2.2. Решение задачи Римана и связанного с ней интегрального уравнения	72
§3. Аналитическое и численное исследование дисперсионной функции $\Omega(z)$	74
3.1. Основные свойства дисперсионной функции $\Omega(z)$	74
3.2. Условия существования корней дисперсионной функции $\Omega(z)$	78

3.3. Аналитическое выражение для корней функции $\Omega(z)$	84
§4. Решение краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений	87
4.1. Решение краевой задачи для случая, когда дисперсионная функция $\Omega(z)$ не обращается в нуль	87
4.2. Решение краевой задачи для случая, когда дисперсионная функция $\Omega(z)$ обращается в нуль	95
Глава 4. Численная реализация аналитического решения для электрического поля	106
§1. Алгоритм вычисления	106
§2. Случай невырожденной плазмы	108
2.1. Представление для сингулярного интеграла $I(\lambda)$	108
2.2. Результаты расчетов при $\nu = 0.001\omega_p$	110
2.3. Результаты расчетов при $\nu = 0.005\omega_p$	113
2.4. Свойства $\mathcal{E}(x)$, вытекающие из численных результатов	113
§3. Случай вырожденной плазмы	114
3.1. Представление для сингулярного интеграла $I(\lambda)$	115
3.2. Результаты расчетов при $\alpha = 2$ и $\nu = 0.001\omega_p$	116
3.3. Результаты расчетов при $\alpha = 5$ и $\alpha = 10$	118
3.4. Результаты расчетов при $\nu = 0.01\omega_p$	120
3.5. Свойства $\mathcal{E}(x)$, вытекающие из численных результатов	121
Заключение	123
Литература	125

Введение

0.1. Общая характеристика работы. Диссертация посвящена построению в замкнутом аналитическом виде решения краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений, возникающей при моделировании возмущения слоя плазмы электрическим полем на основе уравнений Больцмана — Максвелла. Такое решение найдено с помощью новых формул для преобразования Фурье обобщенных функций специального вида, а также новых результатов для задачи Римана сопряжения аналитических функций.

Изучаемая в работе краевая задача имеет следующий вид:

$$v\mathcal{F}_x(x, v) + A\mathcal{F}(x, v) = v\mathcal{E}(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x, s)k(s)ds, \quad (0.1)$$

$$\mathcal{E}_x(x) = B \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x, s)k(s)ds, \quad (0.2)$$

$$\mathcal{F}(l, v) = \mathcal{F}(l, -v), \quad \mathcal{F}(-l, v) = \mathcal{F}(-l, -v), \quad \mathcal{E}(l) = \mathcal{E}(-l) = 1, \quad (0.3)$$

где функции $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$ являются искомыми в полосе

$$\{x \in (-l, l), v \in (-\infty, +\infty)\}, \quad (0.4)$$

а функция $k(s)$ считается заданной и для нее предполагается условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(s)ds = 1; \quad (0.5)$$

величины $A \in \mathbb{C}$ и $B \in \mathbb{R}$ в уравнениях (0.1), (0.2) являются параметрами задачи.

Уравнения (0.1), (0.2) получены путем линеаризации системы Больцмана — Максвелла [2, 25, 79, 86, 88, 94, 97, 122] с модельным интегралом столкновений в форме Бхатнагара — Гросса — Крука [21, 94, 101, 122, 141]. Величины $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$ представляют собой возмущения функции распределения электронов и напряженности электрического поля соответственно, а переменные (x, v) имеют смысл координаты и скорости [88, 91, 92]. В уравнениях (0.1), (0.2) ядро $k(s)$ представляет собой обезразмеренную невозмущенную функцию распределения,

в качестве которой в работе рассмотрены функция Ферми — Дирака [2, 62, 63, 94] и функция Максвелла [72, 79, 101], а параметры A и B выражаются через плазменную частоту, частоту столкновений и частоту приложенного внешнего поля, см. гл. 1.

Для построения аналитического решения задачи (0.1)–(0.5) система уравнений (0.1), (0.2) вначале была рассмотрена во всей плоскости $(x, v) \in \mathbb{R}^2$, т.е. в более широкой, чем полоса (0.4), области. Затем для построения общего решения этой системы в $\mathbb{R}^2$ был применен метод преобразования Фурье. При этом прямое преобразование Фурье F применялось к уравнениям (0.1), (0.2) по координате x , а скорость v рассматривалась как параметр. Функции $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$, следуя общей схеме метода Фурье [35], отождествляем с элементами пространства D' линейных непрерывных функционалов над пространством D финитных бесконечно дифференцируемых функций на вещественной оси x . Тогда образы Фурье $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v) := F[\mathcal{F}(x, v)]$, $\widehat{\mathcal{E}}(\zeta) := F[\mathcal{E}(x)]$ принадлежат пространству Z' линейных непрерывных функционалов над пространством Z образов Фурье функций из D ; теория пространств D' и Z' изложена в монографиях И.М. Гельфанда и Г.Е. Шилова [42, 134].

В результате применения преобразования Фурье к системе (0.1), (0.2) была получена система интегральных уравнений относительно $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v)$ и $\widehat{\mathcal{E}}(\zeta)$. Решение этой системы в пространстве Z' было найдено в аналитическом виде, а затем искомое решение исходной системы интегро-дифференциальных уравнений (0.1), (0.2) получено во всей плоскости $\mathbb{R}^2$ путем вычисления обратного преобразования Фурье

$$\mathcal{F}(x, v) = F^{-1}[\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v)], \quad \mathcal{E}(x) = F^{-1}[\widehat{\mathcal{E}}(\zeta)]. \quad (0.6)$$

Отметим, что при нахождении $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$ согласно (0.6) были применены новые формулы, позволяющие вычислять F^{-1} от некоторых функционалов из Z' , имеющих вид интеграла по параметру. Такие формулы найдены с помощью развития методов, содержащихся в [34, 42, 134, 152].

Найденное общее представление для решения $\mathcal{F}(x, v)$, $\mathcal{E}(x)$ системы (0.1),

(0.2) в плоскости $\mathbb{R}^2$ содержит набор произвольных констант Q_j и свободную функцию $Q(\lambda)$. Сужение такого решения на полосу (0.4) и учет краевых условий (0.3) приводит к сингулярному интегральному уравнению на вещественной прямой $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ с ядром Коши относительно функции $Q(\lambda)$, в которое константы Q_j входят в качестве параметров. Для решения этого уравнения применена модификация метода Ф.Д. Гахова и Н.И. Мусхелишвили [39, 103], основанного на его сведении к задаче Римана линейного сопряжения с последующим ее решением в замкнутом аналитическом виде. Для определения констант Q_j использованы условия разрешимости задачи Римана.

После нахождения $Q(\lambda)$ и Q_j решение $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$ задачи (0.1)–(0.5) полностью построено. Затем в работе выполнена численная реализация представления для $\mathcal{E}(x)$ для случаев, когда ядро $k(s)$ соответствует распределениям Ферми — Дирака и Максвелла, а затем исследована зависимость $\mathcal{E}(x)$ от частоты внешнего поля, частоты столкновений и выбора функции $k(s)$.

0.1.1. Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Развитие конструктивных методов решения математических задач, возникающих при изучении плазмы, является одним из основных направлений современной математической физики и теории дифференциальных уравнений, см., например, [57, 69, 80, 82, 101, 135]. Такие задачи играют важную роль в прикладных проблемах, связанных с удержанием плазмы в магнитных ловушках [6, 8, 27, 28, 100, 101, 121, 132, 160, 163], созданием микроэлектронных приборов [7, 23, 26, 32, 55, 58, 107], изучением различных явлений в физике Солнца и в астрофизике [54, 65, 70, 108, 109, 142, 155, 160]. Несмотря на существенный прогресс в разработке численных методов для таких задач, см., например, [4, 5, 22, 24, 80, 82, 83, 85, 126, 127, 128, 129, 136, 142], по-прежнему сохраняет высокую актуальность построение новых аналитических решений, а также разработка соответствующего математического аппарата [9, 10, 14, 16, 17, 27, 30, 31, 59, 60, 61, 67, 68, 69, 101, 102, 123, 135].

Задачи об отклике плазмы на внешнее электромагнитное возмущение, к ко-

торым относится постановка (0.1)–(0.5), привлекали внимание специалистов, начиная с работ Л. Тонкса и И. Лэнгмюра [153, 161]. Развитию этого направления были посвящены исследования отечественных и зарубежных ученых, см., например, работы [25, 29, 36, 37, 76, 88, 113, 145, 162]. Построение аналитических решений было предметом работ [54, 76, 86, 89, 90, 91, 92, 93, 99, 145, 162], однако в литературе не прослеживается замкнутых аналитических решений для случая, когда уравнения содержат интегральные нелокальные слагаемые, как, например, в постановке (0.1)–(0.5).

Применение интегральных преобразований обобщенных функций открывает возможности развития конструктивных методов для решения важнейших классов задач математической физики [34, 56, 81]. В связи с этим полученные в диссертации новые формулы для прямого и обратного преобразования Фурье являются актуальным [38, 114], значимым результатом, полученным в диссертации. Основы современной теории обобщенных функций заложены в работах С.Л. Соболева [114, 115], Л. Шварца [133, 159], Л. Хёрмандера [125, 152], И.М. Гельфанда и его научной школы [3, 42, 134]. В современных монографиях и курсах значительная роль отводится интегральным преобразованиям обобщенных функций медленного роста из пространства S' , см., например, [33, 81]. Вместе с тем, при применении преобразования Фурье к системе (0.1), (0.2) естественным является рассмотрение преобразования Фурье в пространствах D' и Z' . При этом для его реализации необходимо получать явные конструкции для преобразования Фурье от малоизученного класса функций, являющихся интегралами от семейства функционалов из Z' , непрерывно зависящих от некоторого параметра. Таким образом, найденные в работе новые формулы являются важным, актуальным результатом.

Задача линейного сопряжения аналитических функций восходит к работе Б. Римана [110], а ее теория получила глубокое развитие в исследованиях известных математиков [39, 41, 120, 143, 151, 154, 157]. История создания конструктивных методов для задачи Римана подробно отражена в монографиях [39, 103],

курсах [84, 150], см. также [158]. Развитие различных математических аспектов, связанных с этой задачей, активно продолжается в настоящее время, см., например, [12, 13, 40, 53, 64, 73, 74, 75, 77, 78, 105, 106, 116, 117, 118, 130, 131]. Это связано не только с фундаментальным значением задачи Римана для теории краевых задач теории аналитических функций, но и с многими актуальными приложениями, см. [12, 14, 15, 16, 98, 104, 111, 119, 140]. Необходимо отметить, что при реализации методов Ф.Д. Гахова и Н.И. Мусхелишвили для практических задач, как правило, необходима модификация классических представлений для решения задачи Римана. Такая модификация осуществлена для построения решения задачи Римана, возникающей в связи с решением краевой задачи для линеаризованной системы Больцмана — Максвелла (0.1)–(0.5).

0.1.2 Цели диссертационной работы.

1. Построение методом Фурье аналитического решения во всей плоскости (x, v) для линеаризованной системы уравнений (0.1), (0.2), возникающей при моделировании возмущения слоя плазмы электрическим полем.

2. Вывод новых формул для прямого и обратного преобразования Фурье обобщенных функций специального вида, представимых в виде интегралов по параметру, необходимых для построения решения системы (0.1), (0.2).

3. Построение в аналитическом виде решения краевой задачи (0.1)–(0.5) на основе найденного в п. 1 представления для искоемых $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$. Решение возникающего при таком подходе сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши путем сведения к задаче Римана.

0.1.3 Основные результаты диссертации.

1. Для линеаризованной системы уравнений Больцмана — Максвелла (0.1), (0.2), возникающей при моделировании возмущения слоя плазмы электрическим полем, с помощью метода преобразования Фурье построено аналитическое решение во всей плоскости (x, v) . При этом найдено аналитическое решение системы интегральных уравнений для образов Фурье искоемых функций в пространстве обобщенных функций Z' .

2. Найдены новые формулы для преобразования Фурье обобщенных функций, имеющих вид интегралов по параметру. Такие формулы применены в п. 1 для построения общего решения системы (0.1), (0.2) во всей плоскости (x, v) .

3. Построено решение краевой задачи (0.1)–(0.5) для линеаризованной системы уравнений Больцмана — Максвелла, решение возникающего при этом сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши и соответствующей задачи Римана сопряжения аналитических функций с помощью модификации представлений Ф.Д. Гахова и Н.И. Мусхелишвили.

4. Осуществлена численная реализация построенного аналитического решения для электрического поля для случаев, когда невозмущенная плазма описывается функцией Ферми — Дирака или Максвелла. Исследованы свойства решения в зависимости от частоты внешнего поля, частоты столкновений и выбора невозмущенной функции распределения.

0.1.4. Научная новизна работы заключается в следующем. Найденное интегральное представление для общего решения рассматриваемой системы двух интегро-дифференциальных уравнений (0.1), (0.2), справедливое во всей плоскости переменных (x, v) , является новым. При его построении с помощью метода преобразования Фурье в пространствах D' и Z' были получены новые формулы для прямого и обратного преобразования Фурье обобщенных функций специального класса, имеющих вид интегралов по параметру. Для решения в пространстве обобщенных функций Z' системы интегральных уравнений, возникающей при применении метода Фурье к системе (0.1), (0.2), были применены оригинальные приемы, позволившие найти образы Фурье искомых функций в замкнутом аналитическом виде. Решение краевой задачи (0.1)–(0.5) для системы интегро-дифференциальных уравнений, описывающей взаимодействие внешнего электрического поля с плазмой, является новым. Оно построено на основе указанного выше общего решения. При его построении соответствующее сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши решено с помощью модификации представления Ф.Д. Гахова — Н.И. Мусхелишвили для решения задачи Римана.

Новой также является выполненная численная реализация построенного аналитического решения для электрического поля для случаев, когда невозмущенная плазма описывается функцией Максвелла или Ферми — Дирака, и исследование зависимости самосогласованного электрического поля в слое плазмы от частоты внешнего поля, частоты столкновений и выбора невозмущенной функции распределения.

0.1.5. Положения, выносимые на защиту.

1. Аналитическое решение линеаризованной системы Больцмана — Максвелла (0.1), (0.2) во всей плоскости (x, v) .
2. Формулы для обратного преобразования Фурье обобщенных функций из пространства Z' , имеющих вид интегралов по параметру.
3. Аналитическое решение краевой задачи (0.1)–(0.5) в полосе (0.4) на основе представления из п. 1. Решение соответствующего сингулярного интегрального уравнения и краевой задачи Римана.
4. Результаты численного исследования построенного аналитического решения для электрического поля для случаев, когда невозмущенная плазма описывается функцией Ферми — Дирака или Максвелла.

0.1.6. Используемые методы. Для решения поставленной задачи используются методы математической физики, применяемые для решения интегро-дифференциальных уравнений, теория обобщенных функций, теория сингулярных интегральных уравнений, методы комплексного анализа.

Основу применяемой математической модели составляет кинетическое уравнение Больцмана с интегралом столкновений, предложенным Бхатнагаром, Гроссом и Круком [21, 94, 101, 141]. Кинетическое уравнение дополняется уравнением Максвелла для электрического поля. После линеаризации такой системы, которую естественно называть системой Больцмана — Максвелла, и процедуры обезразмеривания с учетом естественных краевых условий на границе плазменного слоя, приходим к постановке задачи (0.1)–(0.5), которая является основной в диссертации. Система (0.1), (0.2) решена с помощью расширения области и

применения комплексного преобразования Фурье. Такое преобразование Фурье рассматривается автором в пространствах D' и Z' обобщенных функций. При решении системы интегральных уравнений в Z' , к которой с помощью преобразования Фурье сводится система (0.1), (0.2) в $\mathbb{R}^2$, возникает дисперсионная функция $\Omega(z)$, от существования нулей которой зависит вид решения всей задачи (0.1)–(0.5). При применении к системе (0.1), (0.2) прямого и обратного преобразования Фурье использовались методы теории обобщенных функций, изложенные в [3, 35, 42, 134], а также новые формулы для обратного преобразования Фурье от обобщенных функций, имеющих вид интегралов по параметру. Такие формулы были найдены с помощью развития подходов, приведенных в монографиях Гельфанда и Шилова [42, 134].

Для решения краевой задачи (0.1)–(0.5) в полосе применено найденное в диссертации интегральное представление решения системы (0.1), (0.2) в плоскости $\mathbb{R}^2$. Для нахождения неизвестной плотности в таком представлении выписано сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши. Решение этого уравнения найдено путем сведения к задаче Римана на вещественной прямой и применения модификации метода Ф.Д. Гахова и Н.И. Мусхелишвили.

Для нахождения комплексных корней дисперсионной функции $\Omega(\lambda)$ использовался численный метод Ньютона. Начальное приближение находилось на основе построенного явного интегрального представления для таких корней. Вывод этой формулы осуществлен с помощью альтернативного представления дисперсионной функции, полученного как решение задачи Римана с условием сопряжения на вещественной оси.

0.1.7. Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием строго обоснованных методов современной математической физики, теории функций комплексного переменного, а также теории краевых задач для аналитических функций, включая метод сингулярных интегральных уравнений и теорию обобщенных функций. В работе представлены подробные доказательства сформулированных теорем и приведен полный вывод решения краевой задачи

(0.1)–(0.5). Применяемая математическая модель разработана на основе известных положений теоретической физики, физики плазмы, физики твердого тела, базовых положений кинетической теории и электродинамики, см. [2, 25, 62, 63, 72, 76, 79, 86, 88, 94, 97, 101, 145].

Положения и выводы диссертационной работы находятся в соответствии с современными представлениями теории дифференциальных и интегральных уравнений, математической и теоретической физики, а также физики твердого тела и физики плазмы.

0.1.8 Теоретическая и практическая значимость. Построенное замкнутое аналитическое решение линеаризованной системы уравнений Больцмана — Максвелла (0.1), (0.2) значимо для развития конструктивных методов решения интегро-дифференциальных уравнений и их приложений к задачам физики плазмы. Найденные при построении такого решения новые формулы для преобразования Фурье обобщенных функций могут быть применены для достаточно широкого класса задач математической физики. Используемая при решении краевой задачи (0.1)–(0.5) модификация метода Ф.Д. Гахова — Н.И. Мусхелишвили может быть применена к сингулярным интегральным уравнениям с неклассическими данными и задаче Римана с растущей правой частью. Построенное аналитическое решение задачи (0.1)–(0.5) может быть использовано для верификации численных методов. Постановка задачи (0.1)–(0.5) предполагает весьма общий вид невозмущенных функций распределения, например функции Максвелла и Ферми — Дирака. В связи с этим результаты работы могут быть применены к широкому кругу задач, возникающих при изучении явлений в полупроводниках, металлах и др. средах.

0.1.9 Вклад соискателя. Личное участие соискателя в получении результатов, изложенных в диссертации, состоит в получении решения рассматриваемой системы интегро-дифференциальных уравнений, выведении новых формул для прямого и обратного преобразования Фурье введенных обобщенных функций, численной реализации построенного аналитического представления электриче-

ского поля и исследование его зависимости от параметров задачи. Решение задачи Римана, возникающей при решении сингулярного интегрального уравнения, получено совместно с научным руководителем.

0.1.10. Публикации. По теме диссертации опубликовано ряд статей и материалов конференций. Основные результаты работы отражены в 8 статьях, напечатанных в журналах, 7 из которых индексируются в Scopus [47, 48, 49, 87, 137, 138, 146]. Также опубликованы тезисы в трудах международных и всероссийских конференций [18, 19, 44, 45, 46, 50, 51, 52, 139, 147, 148, 149].

0.1.11. Апробация работы. Результаты диссертации доложены на следующих научных семинарах:

1) Семинар «Методы решения задач математической физики», Москва, ФИЦ ИУ РАН, 2024 г. (руководители: академик РАН Ю.Г. Евтушенко, чл.-корр. РАН С.И. Безродных, д.ф.-м.н. В.И. Власов, д.ф.-м.н., проф. С.Я. Степанов).

2) Семинар «Асимптотические методы в математической физике», Москва, ИПМех РАН, 2024 г. (руководитель д.ф.-м.н., проф. С.Ю. Доброхотов).

3) Семинар «Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения», Москва, Математический институт им. С.М. Никольского РУДН, 2024 г. (руководитель д.ф.-м.н., проф. А.Л. Скубачевский).

4) Семинар лаборатории теории плазменных явлений, Москва, Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 2019 г. (руководитель д.ф.-м.н., проф. С.А. Урюпин).

5) Семинар им. А.А. Рухадзе Теоретического отдела ИОФ РАН, Москва, Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, 2019 г. (руководитель д.ф.-м.н., проф. Н.Г. Гусейн-заде).

6) Межкафедральный научный семинар по физике физико-математического факультета Московского государственного областного университета (МГОУ), Москва, МГОУ, 2019 г. (руководитель д.ф.-м.н., проф. Э.В. Геворкян).

Полученные результаты были представлены на всероссийских и международных конференциях:

- 1) Международная конференция «Математическое моделирование, численные методы и инженерное программное обеспечение». Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 11–12 декабря 2023 г.;
- 2) Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики». Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 5–8 декабря 2023 г.;
- 3) III International Conference “Mathematical Physics, Dynamical Systems, Infinite-Dimensional Analysis”. Moscow Region, Dolgoprudny, MPTI, July 5–13, 2023;
- 4) Международная конференция “Математические методы механики. К 90-летию юбилею академика РАН А.Г. Куликовского”. Москва, МИАН, 20–24 марта 2023 г.;
- 5) VIII международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики». Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 6–9 декабря 2022 г.;
- 6) V международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования». Москва, МИАН, 27–30 июня 2022 г.;
- 7) IV международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования». Москва — Якутск, МИАН, 19–21 июня 2019 г.;
- 8) 10-я Всероссийская конференция «Необратимые процессы в природе и технике». Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 29–31 января 2019 г.;
- 9) Международная конференция «Физические свойства материалов и дисперсных сред для элементов информационных систем, нанoeлектронных приборов и экологических технологий». Москва, МГОУ, 17 апреля 2018 г.;
- 10) Международная междисциплинарная конференция «Эйлеровы чтения». Москва, МГОУ, 22–24 ноября 2017 г.;
- 11) Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды». Москва, МИАН, 13–15 ноября 2017 г.;
- 12) Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики». Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 24–27 октября 2017 г.

0.1.12 Структура работы. Диссертация разбита на главы, параграфы, пункты и подпункты. Первая цифра номера пункта совпадает с номером параграфа, а

вторая обозначает номер пункта в этом параграфе. В каждой главе принята своя нумерация теорем и утверждений. Нумерация формул двойная: первая цифра означает номер параграфа, вторая — порядковый номер формулы в параграфе. При ссылке на формулу из другой главы к номеру формулы добавляется явная ссылка на соответствующую главу. При ссылке на подпункт к его номеру добавляется номер параграфа и пункта. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Объем работы составляет 138 страниц, включая 42 рисунка. Список литературы содержит 163 наименования.

0.2. Обзор содержания диссертации.

В **главе 1** приведен вывод постановки задачи (0.1)–(0.5) на основе используемой математической модели [76, 88, 90, 144, 145] отклика плазмы на внешнее электрическое поле. Рассмотрены два случая: 1) плазма с произвольной степенью вырождения, для которой в невозмущенном состоянии справедлива статистика Ферми — Дирака, и 2) классическая плазма, невозмущенное состояние которой подчиняется распределению Максвелла. В § 1 главы 1 приведены необходимые сведения из физики плазмы, § 2 посвящен системе Больцмана — Максвелла, из которой в §§ 3 и 4 путем линеаризации выводится рассматриваемая далее система интегро–дифференциальных уравнений с зеркальными граничными условиями. Присутствующие в уравнениях параметры A , B и вид функции $k(s)$ отражают зависимость от выбранного распределения: Ферми — Дирака или Максвелла.

Глава 2 посвящена построению общего решения системы интегро–дифференциальных уравнений (0.1), (0.2) в плоскости $(x, v) \in \mathbb{R}^2$. Для этого применяется метод преобразования Фурье, а искомые функции $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$ рассматриваются в пространстве обобщенных функций D' . В § 2 приведены необходимые сведения о пространствах D' и Z' обобщенных функций. Теоремы 2.1–2.3 посвящены исследованию свойств обобщенных функций, имеющих вид интеграла по параметру, а также построению преобразования Фурье таких функций.

В § 3 осуществлено применение преобразования Фурье к системе (0.1), (0.2)

и ее сведение к системе интегральных уравнений относительно образов Фурье $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v)$ и $\widehat{\mathcal{E}}(\zeta)$. Решение этой системы дано в теореме 2.4. В теореме 2.5 дан общий вид решения системы (0.1), (0.2), полученный с помощью обратного преобразования Фурье (0.6).

Глава 3 посвящена решению краевой задачи (0.1)–(0.5). Параграфы 1, 2 содержат вводные замечания и необходимые сведения о задаче Римана, а также о методе Ф.Д. Гахова — Н.И. Мусхелишвили, описанном в монографиях [39, 103].

В § 3 исследуется так называемая “дисперсионная функция” $\Omega(\lambda)$ для двух рассматриваемых типов плазмы. Установлено, что $\Omega(\lambda)$ может иметь не более двух комплексных нулей. Определены границы физических параметров задачи, при которых существуют нули $\pm\lambda_0$ функции $\Omega(\lambda)$. Выведена формула для явного представления величины λ_0 .

В § 4 получено решение краевой задачи (0.1)–(0.5). В теореме 3.9 п. 4.1 представлено решение для случая, когда дисперсионная функция не обращается в нуль, в теореме 3.12 п. 4.2 это решение построено для случая, когда дисперсионная функция имеет два простых нуля. В каждом из случаев краевая задача сводится к решению сингулярного интегрального уравнения, которое, в свою очередь, решается с помощью сведения к задаче Римана. Определены необходимые и достаточные условия разрешимости и сформулированы и доказаны соответствующие теоремы.

Глава 4 посвящена численной реализации аналитического представления электрического поля, построенного в главах 2, 3, и исследована его зависимость от параметров задачи.

В параграфе 1 описан алгоритм, применяемый для численной реализации. В § 2 и § 3 представлены результаты вычисления электрического поля для случаев, когда невозмущенная функция распределения совпадает с распределением Максвелла и Ферми — Дирака соответственно. Осуществлено исследование зависимости решения от параметров задачи, которыми являются частота столкновений в плазме и частота внешнего электрического поля, а в случае распре-

деления Ферми — Дирака — еще и химический потенциал.

0.3. Используемые обозначения и утверждения.

0.3.1. Множества.

$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел;

$\mathbb{C}$ — комплексная плоскость;

$\mathbb{H}^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость;

$\mathbb{H}^- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$ — нижняя полуплоскость.

0.3.2 Функции. Если $f(z)$ — кусочно-аналитическая функция в $\mathbb{C}$ с линией разрыва по вещественной оси, то будем писать $f^+(z) = f(z)$, $z \in \mathbb{H}^+$ и $f^-(z) = f(z)$, $z \in \mathbb{H}^-$, т.е. верхний индекс “+” будет означать, что z лежит в верхней полуплоскости, а верхний индекс “−” будет означать, что z лежит в нижней полуплоскости.

Выражение $a := b$ означает, что a по определению равно b .

0.3.3 Асимптотические символы. Запись $f(s) = \mathcal{O}(g(s))$ при $s \rightarrow s_0$ означает существование отличного от нуля конечного предела

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{f(s)}{g(s)} = C \neq 0.$$

Запись $f(s) = o(g(s))$ при $s \rightarrow s_0$ означает, что этот предел равен нулю:

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{f(s)}{g(s)} = 0.$$

0.3.4. Используемые утверждения.

Принцип аргумента [84, с. 88]. Пусть функция $f(z)$ аналитична внутри области D всюду, кроме конечного числа полюсов, непрерывна на границе C этой области и не обращается на C в нуль; пусть еще $f'(z)$ непрерывна на C . Тогда разность между полным числом нулей и полюсов этой функции внутри D равна числу оборотов вектора w при обходе кривой Γ , соответствующей C при отображении $w = f(z)$.

Обобщенная теорема Ливилля [39, с. 97]. Пусть функция $f(z)$ аналитична во всей плоскости комплексного переменного, за исключением точек $a_0 = \infty$,

a_k ($k = 1, 2, \dots, n$), где она имеет полюсы, причем главные части разложений функции $f(z)$ в окрестности полюсов имеют вид:

$$G_0(z) = c_1^0 z + c_2^0 z^2 + \dots + c_{m_0}^0 z^{m_0},$$

$$G_k \left(\frac{1}{z - a_k} \right) = \frac{c_1^k}{z - a_k} + \frac{c_2^k}{(z - a_k)^2} + \dots + \frac{c_{m_k}^k}{(z - a_k)^{m_k}}$$

в точках a_0 и a_k соответственно.

Тогда функция $f(z)$ есть рациональная функция и может быть представлена формулой

$$f(z) = c + G_0(z) + \sum_{k=1}^n G_k \left(\frac{1}{z - a_k} \right).$$

В частности, если единственная особенность функции $f(z)$ есть полюс порядка m в бесконечно удаленной точке, то $f(z)$ есть многочлен степени m :

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_m z^m.$$

Глава 1. Математическая модель воздействия электрического поля на слой плазмы

§1. Вводные замечания

В следующих параграфах 1–4 изложена математическая модель [76, 88, 90, 144, 145] воздействия слабого электрического поля $\mathbf{E}_{ext}$ на слой плазмы и представлен вывод системы интегро–дифференциальных уравнений (0.1), (0.2) и краевых условий (0.3).

Предположим, что плазма занимает бесконечный слой ширины $2L$, т.е. область вида

$$\{\mathbf{r} = (x, y, z) : x \in (-L, L), y, z \in \mathbb{R}\}. \quad (1.1)$$

Под воздействием внешнего возмущения $\mathbf{E}_{ext}$, приложенного к границе слоя,

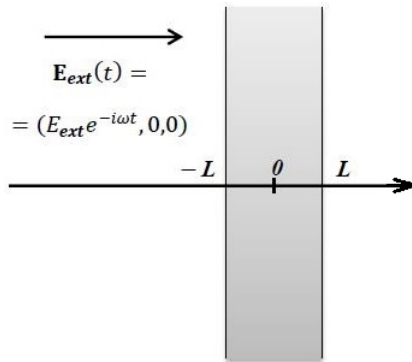


Рис. 1.1. Действие внешнего поля на слой плазмы.

функция распределения электронов $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ отклоняется от невозмущенной функции $f_0(\mathbf{v})$. Представим $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ в виде

$$f = f_0 + f_1,$$

где поправка f_1 в случае малого возмущения предполагается малой, т.е. $|f_1| \ll f_0$ (см., например, [2, с. 44], [101, с. 214]). Решение задачи существенно зависит от выбора функции f_0 , в качестве которой в настоящей работе выбирается или распределение Максвелла, или распределение Ферми — Дирака.

Функция распределения Максвелла, имеющая вид [79, 86, 97, 101]:

$$f_0(\mathbf{v}) = n_0 \exp \frac{m\mathbf{v}^2}{2k_B T}, \quad (1.2)$$

широко используется для описания явлений как в ионизированных газах, так и во многих моделях в других (более плотных) средах; здесь $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ — скорость электрона, k_B — постоянная Больцмана, T — температура, n_0 — нормирующая константа. Распределение Максвелла связано с понятием классической плазмы, где не учитываются квантовые эффекты. Неклассическая вырожденная плазма, в которой квантовые эффекты играют значительную роль, подчиняется статистике Ферми — Дирака [21, 94, 112]:

$$f_0(\varepsilon) = \left(1 + \exp \frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}\right)^{-1}, \quad (1.3)$$

где ε — энергия электрона, μ — химический потенциал.

В данной работе степень вырождения плазмы определяется через химический потенциал μ , который не зависит от энергии электрона ε , но зависит от концентрации и температуры. Величина μ принимает положительные значения $\mu \in (0, +\infty)$, см., например, [112]. При реализации предельного случая $\mu \rightarrow 0$ функция распределения Ферми — Дирака близка к функции распределения Максвелла. Электронный газ в этом случае называют невырожденным. Малые значения μ реализуются при невысоких концентрациях и широком диапазоне температур. Статистике Максвелла подчиняется, например, разреженная высокотемпературная плазма.

Второму предельному случаю $\mu \rightarrow +\infty$ соответствует так называемая вырожденная плазма, для которой характерны высокие значения концентрации зарядов (плотная плазма) и/или низкая температура (холодная плазма). В качестве примера можно привести электронный газ в металлах. Функцию распределения Ферми — Дирака (1.3) использовали для описания поведения заряженных частиц Г. Бете и А. Зоммерфельд [20], которые развили теорию П. Друде проводимости металлов [62, 96]. Условия вырожденности плазмы реализуются также в некоторых астрофизических задачах.

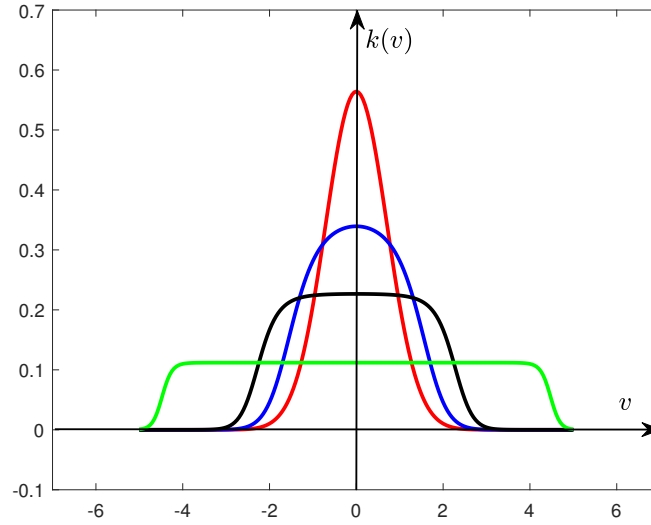


Рис. 1.2. Красный график — распределение Максвелла, синий, черный, зеленый — распределение Ферми — Дирака с $\mu/k_B T = 2, 5, 10$ соответственно.

Отметим, что с появлением новых материалов и развитием электроники и приборостроения становится актуальной задача описания кинетических явлений в твердых телах и проводящих кристаллах с различными характеристиками, в том числе во всем диапазоне изменения химического потенциала $\mu \in (0, +\infty)$ [21].

Далее в § 3 и § 4 выведены уравнения (0.1), (0.2), где в качестве равновесной функции распределения используется соответственно распределение Ферми — Дирака (1.3) или Максвелла (1.2). Показано, что в каждом случае задача описывается одной и той же системой интегро-дифференциальных уравнений, в которой зависимость от выбранного типа плазмы отражена с помощью присутствующих в уравнениях параметров A , B и функции $k(s)$. Это позволяет решать систему в общем виде, а свойства решений исследовать в зависимости от конкретных значений параметров задачи.

§2. Уравнения Больцмана — Максвелла

В условиях воздействия внешнего поля малой амплитуды будем считать ионы неподвижными, см. [101, с. 214], и рассматривать только движение электронов. Под воздействием внешнего возмущения, приложенного к границе слоя, функция распределения электронов $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ отклоняется от невозмущенной функции $f_0(\mathbf{v})$ и в плазме возникают электрическое и магнитное поле $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Искомые функции f , $\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{mH}$ удовлетворяют системе Больцмана — Максвелла [21, 94, 97]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \epsilon \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \mathcal{I}_{st}, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \rho = \epsilon \int (f - f_0) d\sigma, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{mH}; \quad (2.4)$$

здесь $\mathcal{I}_{st}$ — интеграл столкновений, ρ — плотность заряда, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ — импульс, ϵ — заряд электрона, $\mathbf{m}$ — относительная магнитная проницаемость.

Будем рассматривать случай, когда частота внешнего поля постоянна, а электрическая напряженность направлена перпендикулярно границе слоя плазмы. Поместив начало координат в середину слоя, а ось Ox расположив перпендикулярно слою, получим, что внешнее поле имеет следующие координаты:

$$\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} (E_{ext}, 0, 0).$$

Следуя [2, 86, 101], будем предполагать, что электрическое и магнитное поля в плазме допускают представления:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} (E(x), 0, 0), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} (H_x, H_y, H_z),$$

которые после подстановки в уравнение для магнитной индукции (здесь $\mathbf{m}$ — относительная магнитная проницаемость)

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{mH}, \quad \mathbf{H} = -\frac{ic}{\omega \mathbf{m}} \operatorname{rot} \mathbf{E}$$

дают $\mathbf{H} = \mathbf{0}$. Таким образом, сделанное модельное допущение позволяет исключить из рассмотрения магнитное поле и решать систему уравнений (2.1)–(3.2) относительно функции распределения f и электрического поля $\mathbf{E}$.

Интеграл столкновений в правой части уравнения запишем в форме Бхатнагара — Гросса — Крука [21, 94, 101, 141]:

$$\mathfrak{I}_{st} = \nu (f_{eq} - f).$$

Кинетическое уравнение примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{e} \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \nu (f_{eq} - f). \quad (2.5)$$

В следующих параграфах будем рассматривать это уравнение, используя в качестве невозмущенной и локально равновесной функций распределения функции, соответствующие распределению Ферми — Дирака (§ 3) и Максвелла (§ 4).

§3. Линеаризованная система интегро-дифференциальных уравнений Больцмана — Максвелла для случая равновесного распределения Ферми — Дирака

В настоящем параграфе рассматривается плазма с произвольной степенью вырождения. Локально равновесная функция распределения Ферми — Дирака имеет вид:

$$f_{eq}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \left(1 + \exp \frac{\varepsilon - \mu(\mathbf{r}, t)}{k_B T} \right)^{-1}, \quad (3.1)$$

где $\varepsilon = m\mathbf{v}^2/2$ — кинетическая энергия электрона, $\mu(\mathbf{r}, t)$ — химический потенциал, k_B — постоянная Больцмана, T — температура плазмы, которая считается постоянной в данной задаче. Выражения для поля (2.2) принимают вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \rho = \mathbf{e} \int_{\mathbb{R}^3} (f - f_0) d\sigma, \quad d\sigma = \frac{(2s+1)d^3p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (3.2)$$

здесь ρ — плотность заряда, $\hbar$ — постоянная Планка, s — спин частиц, для электрона $s = 1/2$, f_0 — невозмущенная (абсолютная) функция распределения Ферми — Дирака

$$f_0(\mathbf{v}, \mu_0) = \left(1 + \exp \frac{\varepsilon - \mu_0}{k_B T}\right)^{-1}, \quad (3.3)$$

$\mu_0 = \text{const}$ — значение невозмущенного химического потенциала при отсутствии внешнего электрического поля.

В силу сделанных выше допущений функция распределения электронов имеет вид $f(x, v, v_x, t)$, где v_x — проекция скорости электронов на ось x (буквой v будем обозначать модуль скорости, т.е. $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$). Линеаризуем уравнения (2.5), (3.2), считая, что функция $f(x, v, v_x, t)$ достаточно мало отклоняется от функции распределения Ферми — Дирака f_0 , определенной формулой (3.3). Будем считать, что внешнее поле вызывает незначительные изменения величины химического потенциала, и зависимость химического потенциала от координаты и времени можно записать как $\mu(x, t) = \mu_0 + \mu_1(x)e^{-i\omega t}$, где ω — частота внешнего поля, а возмущение химического потенциала $\mu_1(x)e^{-i\omega t}$ является малой величиной, т.е. $|\mu_1(x)| \ll \mu_0$. Подставим представленный таким образом химический потенциал $\mu(x, t)$ в выражение для локально-равновесной функции распределения и найдем главную линейную часть. Далее будем называть функцией f_{eq} ее главную линейную часть

$$f_{eq}(x, v, t) = f_0(v, \mu_0) + g(v, \mu_0)\mu_1(x)e^{-i\omega t},$$

где

$$g(v, \mu_0) = \frac{\exp \frac{\varepsilon - \mu_0}{k_B T}}{k_B T (1 + \exp \frac{\varepsilon - \mu_0}{k_B T})^2}. \quad (3.4)$$

Функцию $f(x, v, v_x, t)$ будем искать в виде:

$$f(x, v, v_x, t) = f_0(v, \mu_0) + g(v, \mu_0)h(x, v_x)e^{-i\omega t},$$

где $g(v, \mu_0)$ — функция (3.4), а $h(x, v_x)$ — новая неизвестная функция. Заметим, что функции $h(x, v_x)$ и $E(x)$ являются величинами одного порядка малости,

поэтому в линейном приближении мы пренебрегаем произведением $h(x, v_x)E(x)$.

Таким образом, в указанном приближении имеют место равенства

$$\begin{aligned}\epsilon \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} &= \epsilon \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = \epsilon E(x) e^{-i\omega t} \frac{\partial f_0}{\partial p_x} = \epsilon E(x) e^{-i\omega t} \frac{\partial f_0}{m \partial v_x} = \\ &= -E(x) e^{-i\omega t} \frac{\epsilon v_x}{k_B T} \frac{\exp \frac{\epsilon - \mu_0}{k_B T}}{(1 + \exp \frac{\epsilon - \mu_0}{k_B T})^2} = -\epsilon v_x E(x) e^{-i\omega t} g(v, \mu_0).\end{aligned}$$

Учитывая эти равенства и подставив в уравнения (2.5) и (3.2) выражения для $f(x, v, v_x, t)$ и $f_{eq}(x, v, t)$, получаем уравнения:

$$v_x \frac{\partial h(x, v_x)}{\partial x} + (\nu - i\omega) h(x, v_x) = \epsilon v_x E(x) + \nu \mu_1(x), \quad (3.5)$$

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{\pi \epsilon m^3}{(\pi \hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} g(v, \mu_0) h(x, v_x) d^3 v. \quad (3.6)$$

Величину $\mu_1(x)$ можно найти из закона сохранения числа частиц:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_{eq} d\sigma = \int_{\mathbb{R}^3} f d\sigma.$$

Из этого уравнения находим, что

$$\mu_1(x) = \int_{\mathbb{R}^3} g(v, \mu_0) h(x, v_x) d^3 v \left(\int_{\mathbb{R}^3} g(v, \mu_0) d^3 v \right)^{-1}.$$

Знаменатель преобразуем с помощью перехода к сферическим координатам

$$\int_{\mathbb{R}^3} g(v, \mu_0) d^3 v = 4\pi g_2(\mu_0), \quad g_2(\mu_0) = \int_0^\infty g(v, \mu_0) v^2 dv,$$

Выражение для $g_2(\mu_0)$ можно вычислить с помощью интегрирования по частям:

$$g_2(\mu_0) = \int_0^\infty g(v, \mu_0) v^2 dv = \frac{m_0(\mu_0)}{m},$$

где

$$m_0(\mu_0) = \int_0^\infty \frac{dv}{1 + e^{(mv^2/2 - \mu_0)/k_B T}} = \int_0^\infty f_0(v, \mu_0) dv. \quad (3.7)$$

Отсюда ясно, что

$$\mu_1(x) = \frac{m}{4\pi m_0(\mu_0)} \int_{\mathbb{R}^3} g(v, \mu_0) h(x, v_x) d^3 v.$$

Преобразуя оставшийся интеграл с помощью перехода к цилиндрическим координатам, получаем, что он равен

$$\frac{2\pi}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(v_x, \mu_0) h(x, v_x) dv_x,$$

тогда вместо $\mu_1(x)$ в уравнение (3.5) можно подставить выражение

$$\mu_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(v_x, \mu_0)}{2m_0(\mu_0)} h(x, v_x) dv_x. \quad (3.8)$$

Учитывая физический смысл выражения, а именно: $\mu_1(x)$ – возмущение химического потенциала, а функция $h(x, v_x)$ – коэффициент отклонения функции распределения от невозмущенной функции распределения, можно сформулировать утверждение.

Утверждение 1.1. *Отклонение функции распределения заряженных частиц от невозмущенного состояния пропорционально возмущению химического потенциала и выражается формулой (3.8).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из предыдущих рассуждений.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} v_x \frac{\partial h(x, v_x)}{\partial x} + (\nu - i\omega) h(x, v_x) = \epsilon v_x E(x) + \nu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(v_x, \mu_0)}{2m_0(\mu_0)} h(x, v_x) dv_x, & (3.9) \\ \frac{dE(x)}{dx} = \frac{4\pi^2 \epsilon m^2 m_0(\mu_0)}{(\pi \hbar)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(v_x, \mu_0)}{2m_0(\mu_0)} h(x, v_x) dv_x. & (3.10) \end{cases}$$

Коэффициент перед интегралом в уравнении (3.10) можно преобразовать, выделив плазменную частоту. Напомним, что плазменная частота для среды заряженных частиц определяется по формуле [94, с. 832]

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi \epsilon^2 N}{m},$$

где N – концентрация частиц, которую можно найти с помощью интегрирования (с переходом в сферические координаты):

$$N = \frac{2}{(2\pi \hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} f_0(v, \mu_0) d^3 p = \frac{\pi m^3}{(\pi \hbar)^3} \int_0^{+\infty} v^2 f_0(v, \mu_0) dv = \frac{\pi m^3}{(\pi \hbar)^3} m_2(\mu_0),$$

здесь

$$m_2(\mu_0) = \int_0^{+\infty} v^2 f_0(v, \mu_0) dv = \int_0^{+\infty} \frac{v^2 dv}{1 + e^{(mv^2/2 - \mu_0)/k_B T}}. \quad (3.11)$$

Коэффициент в уравнении (3.10) равен $\omega_p^2 m_0(\mu_0)/m_2(\mu_0)$.

Обозначим длину свободного пробега частиц между столкновениями x_0 , а характерное значение скорости v_T и проведем обезразмеривание с помощью следующих замен переменных и функций:

$$v_T = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}, \quad x_0 = \frac{v_T}{\nu}, \quad v_1 = \frac{v_x}{v_T}, \quad x_1 = \frac{x}{x_0}, \quad \alpha_0 = \frac{\mu_0}{k_B T}, \quad \alpha_1(x) = \frac{\mu_1(x)}{k_B T}. \quad (3.12)$$

Заметим, что для интеграла (3.7) при переходе к новым переменным будет верно равенство $m_0(\mu_0) = m_0(\alpha_0)v_T$, а для интеграла (3.11) будет верно равенство $m_2(\mu_0) = m_2(\alpha_0)v_T^3$. Интеграл относительно неизвестной функции $h(x, v_x)$ не изменится (т.к. коэффициенты от замены переменных сократятся):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(v_x, \mu_0)}{2m_0(\mu_0)} h(x, v_x) dv_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(v_1, \alpha_0)}{2m_0(\alpha_0)} h(x_1, v_1) dv_1.$$

Здесь $f_0(v_1, \alpha_0) = (1 + e^{v_1^2 - \alpha_0})^{-1}$. Пусть напряженность внешнего электрического поля на границе слоя равна E_{ext} . Введем следующие безразмерные функции:

$$\mathcal{E}(x) = \frac{E(x)}{E_{ext}}, \quad \mathcal{F}(x_1, v_1) = \frac{\nu}{\epsilon E_{ext} v_T} h(x_1, v_1), \quad k(s) = \frac{f_0(s, \alpha_0)}{2m_0(\alpha_0)}. \quad (3.13)$$

Подставив новые переменные (3.12) и функции (3.13) в уравнения (3.9), (3.10) и опуская для краткости индексы у переменных, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} v\mathcal{F}_x(x, v) + \left(1 - \frac{i\omega}{\nu}\right) \mathcal{F}(x, v) = v\mathcal{E}(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(x, s)k(s)ds, \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_x(x) = \frac{\omega_p^2 m_0(\alpha_0)}{\nu^2 m_2(\alpha_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(x, s)k(s)ds. \end{cases} \quad (3.15)$$

Функция $k(s)$ обладает свойством $\int_{-\infty}^{\infty} k(s)ds = 1$, а коэффициенты в уравнениях (3.14) и (3.15) зависят от свойств плазмы.

$$A = 1 - \frac{i\omega}{\nu}, \quad B = \frac{\omega_p^2 m_0(\alpha_0)}{\nu^2 m_2(\alpha_0)}. \quad (3.16)$$

В случае зеркального отражения электронов от границы плазмы для функции распределения электронов имеем следующие граничные условия на границе слоя размера $2L$:

$$f(\pm L, v, v_x, t) = f(\pm L, v, -v_x, t), \quad -\infty < v_x < +\infty.$$

Отсюда для функции $\mathcal{F}(x, v)$ получаем зеркальные граничные условия:

$$\mathcal{F}(l, v) = \mathcal{F}(l, -v), \quad \mathcal{F}(-l, v) = \mathcal{F}(-l, -v). \quad (3.17)$$

Здесь $l = L/x_0$ – величина слоя в единицах свободного пробега электронов.

Для электрического поля граничное условие имеет вид:

$$E(L) = E_{ext}, \quad E(-L) = E_{ext},$$

что позволяет записать краевые условия для функции $\mathcal{E}(x)$:

$$\mathcal{E}(l) = 1, \quad \mathcal{E}(-l) = 1. \quad (3.18)$$

Таким образом, краевая задача о колебаниях вырожденной плазмы в слое сформулирована полностью и состоит в нахождении такого решения уравнений (3.14) и (3.15), которое удовлетворяет условиям (3.17) и (3.18).

§4. Линеаризованная система интегро–дифференциальных уравнений Больцмана — Максвелла для случая равновесного распределения Максвелла

Рассмотрим возмущение слоя плазмы, невозмущенное состояние которой характеризуется распределением Максвелла. Напомним вид кинетического уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{e} \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \nu (f_{eq} - f), \quad (4.1)$$

где f — искомая функция распределения электронов, f_{eq} — локально-равновесная функция распределения Максвелла,

$$f_{eq}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = n_{eq}(\mathbf{r}, t) \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta v^2}, \quad \beta = \frac{m}{2k_B T};$$

здесь k_B — постоянная Больцмана, T — температура плазмы, m — масса электрона, ν — эффективная частота рассеяния электронов, $n_{eq}(\mathbf{r}, t)$ — концентрация заряженных частиц, определяемая равенством

$$n_{eq}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} f_{eq} d^3 v. \quad (4.2)$$

Выражения (2.2) принимают вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \rho = \epsilon \int_{\mathbb{R}^3} (f - f_0) d^3 v, \quad (4.3)$$

где ρ — плотность заряда, f_0 — невозмущенная (абсолютная) функция распределения Максвелла

$$f_0(v) = n_0 \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta v^2}; \quad (4.4)$$

здесь $n_0 = \text{const}$ — концентрация заряженных частиц при отсутствии внешнего электрического поля, а через v обозначен модуль скорости, т.е. $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.

Будем считать, что для $n_{eq}(\mathbf{r}, t)$ справедливо следующее представление:

$$n_{eq}(\mathbf{r}, t) = n_{eq}(x, t) = n_0 + n_1(x) e^{-i\omega t}, \quad (4.5)$$

где ω — частота внешнего поля, а возмущение концентрации $n_1(x) e^{-i\omega t}$ является малой величиной по сравнению со значением n_0 , т.е. $|n_1(x)/n_0| \ll 1$. Тогда справедливо представление

$$f_{eq}(x, v, t) = n_{eq}(x, t) \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta v^2} = (n_0 + n_1(x) e^{-i\omega t}) \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta v^2} = f_0 + f_1,$$

где

$$f_1 = \frac{n_1(x)}{n_0} e^{-i\omega t} \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta v^2}. \quad (4.6)$$

Искомую функцию распределения электронов $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ представим в виде:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f(x, v, v_x, t) = f_0(v)(1 + h(x, v_x) e^{-i\omega t}),$$

предполагая, что $h(x, v_x)$ – неизвестная функция, причем достаточно малая, т.е. $|h(x, v_x)| \ll 1$. Заметим, что функции $h(x, v_x)$ и $E(x)$ являются величинами одного порядка малости, поэтому в линейном приближении мы пренебрегаем произведением $h(x, v_x)E(x)$. Таким образом, в указанном приближении имеют место равенства

$$\epsilon \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \epsilon \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = \epsilon E(x) e^{-i\omega t} \frac{\partial f_0}{\partial p_x} = \epsilon E(x) e^{-i\omega t} \frac{\partial f_0}{m \partial v_x} = -\epsilon E(x) e^{-i\omega t} \frac{v_x f_0}{k_B T}.$$

Учитывая эти равенства и подставляя в уравнения (4.1) и (4.3) выражения для $f(x, v, v_x, t)$ и $f_{eq}(x, v, t)$, получаем уравнения:

$$\begin{cases} v_x \frac{\partial h(x, v_x)}{\partial x} + (\nu - i\omega) h(x, v_x) = \frac{\epsilon v_x}{k_B T} E(x) + \nu \frac{n_1(x)}{n_0}, \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} \frac{dE(x)}{dx} = 4\pi \epsilon n_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-\beta v_x^2} h(x, v_x) dv_x. \end{cases} \quad (4.8)$$

Далее, учитывая закон сохранения числа частиц:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_{eq} d^3v = \int_{\mathbb{R}^3} f d^3v$$

и используя выражения (4.2) и (4.5) для $n_{eq}(x, t)$, выразим $n_1(x)$ через $h(x, v_x)$:

$$n_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-\beta v_x^2} h(x, v_x) dv_x. \quad (4.9)$$

Подставим (4.9) в (4.7) и получим систему уравнений относительно двух неизвестных функций $E(x)$ и $h(x, v_x)$:

$$\begin{cases} v_x \frac{\partial h(x, v_x)}{\partial x} + (\nu - i\omega) h(x, v_x) = \frac{\epsilon v_x}{k_B T} E(x) + \\ \quad + \nu \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-\beta v_x^2} h(x, v_x) dv_x, \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\begin{cases} \frac{dE(x)}{dx} = 4\pi n_0 \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-\beta v_x^2} h(x, v_x) dv_x. \end{cases} \quad (4.11)$$

Используя формулу для плазменной частоты [101, с. 18]

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi \epsilon^2 n_0}{m},$$

преобразуем коэффициент перед интегралом в уравнении (4.11):

$$4\pi\epsilon n_0 = \frac{4\pi\epsilon^2 m n_0}{m\epsilon} = \frac{\omega_p^2 m}{\epsilon}.$$

Далее проведем обезразмеривание уравнений с помощью средней скорости теплового движения частиц v_T и длины свободного пробега частиц между столкновениями x_0 :

$$v_T = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}, \quad x_0 = \frac{v_T}{\nu}.$$

Введем новые безразмерные переменные v_1 и x_1 :

$$v_1 = \frac{v_x}{v_T}, \quad x_1 = \frac{x}{x_0}. \quad (4.12)$$

Пусть напряженность внешнего электрического поля на границе слоя равна E_{ext} . Введем следующие безразмерные функции:

$$\mathcal{E}(x) = \frac{E(x)}{E_{ext}}, \quad \mathcal{F}(x_1, v_1) = \frac{k_B T \nu}{\epsilon E_{ext} v_T} h(x_1, v_1), \quad k(s) = \frac{e^{-s^2}}{\sqrt{\pi}}. \quad (4.13)$$

Подставляя новые переменные (4.12) и функции (4.13) в уравнения (4.10)–(4.11) и опуская для краткости индексы у переменных, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} v\mathcal{F}_x(x, v) + A\mathcal{F}(x, v) = v\mathcal{E}(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(x, s)k(s)ds, \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_x(x) = B \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(x, s)k(s)ds. \end{cases} \quad (4.15)$$

Функция $k(s)$ обладает свойством $\int_{-\infty}^{\infty} k(s)ds = 1$, а коэффициенты A и B в уравнениях (4.14), (4.15), зависящие от параметров задачи, имеют вид:

$$A = 1 - \frac{i\omega}{\nu}, \quad B = \frac{2\omega_p^2}{\nu^2}. \quad (4.16)$$

В случае зеркального отражения электронов от границы плазмы для функции распределения электронов имеем следующие граничные условия на границе слоя размера $2L$:

$$f(\pm L, v, v_x, t) = f(\pm L, v, -v_x, t), \quad -\infty < v_x < +\infty.$$

Отсюда для функции $\mathcal{F}(x, v)$ получаем зеркальные граничные условия:

$$\mathcal{F}(l, v) = \mathcal{F}(l, -v), \quad \mathcal{F}(-l, v) = \mathcal{F}(-l, -v). \quad (4.17)$$

Здесь $l = L/x_0$ – величина слоя в единицах свободного пробега электронов.

Для электрического поля граничное условие имеет вид:

$$E(L) = E_{ext}, \quad E(-L) = E_{ext},$$

что позволяет записать краевые условия для функции $\mathcal{E}(x)$:

$$\mathcal{E}(l) = 1, \quad \mathcal{E}(-l) = 1. \quad (4.18)$$

Таким образом, краевая задача о колебаниях невырожденной плазмы в слое сформулирована полностью и состоит в нахождении такого решения уравнений (4.14) и (4.15), которое удовлетворяет условиям (4.17) и (4.18).

Глава 2. Общее решение линеаризованной системы Больцмана — Максвелла

§1. Вводные замечания

Данная глава посвящена нахождению аналитического представления решения системы (0.1), (0.2) во всей плоскости $\mathbb{R}^2$, т.е. без учета краевых условий на границе полосы (0.3). Напомним, что вывод этой системы уравнений представлен в § 3 и § 4 главы 1 для случаев, когда невозмущенная функция распределения f_0 совпадает с распределением Ферми — Дирака и Максвелла соответственно, см. формулы (3.14), (3.15) и (4.14), (4.15) главы 1.

Для построения решения системы (0.1), (0.2) в плоскости $\mathbb{R}^2$ воспользуемся методом преобразования Фурье; прямое преобразование Фурье будем применять по переменному x , а скорость v рассматривать как параметр. Искомые функции $\mathcal{F}(x, v)$, $\mathcal{E}(x)$ отождествляем с регулярными функционалами из пространства D' , а их преобразования Фурье, обозначаемые через $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v)$, $\widehat{\mathcal{E}}(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}$, тогда являются функционалами из пространства Z' . При этом $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v)$ зависит от v как от параметра. Напомним, что D' и Z' — линейные непрерывные функционалы соответственно над пространством D финитных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ и пространством Z их образов Фурье $\psi(\zeta)$. Необходимые сведения из теории комплексных обобщенных функций приведены ниже в § 2, материал которого основан на монографиях И.М. Гельфанда, Г.Е. Шилова [42, 134], Л. Хермандера [152], а также в книге под редакцией С.Г. Крейна [81]. В теоремах 2.1–2.3 представлены новые формулы для вычисления обратного преобразования Фурье, которые затем, в § 3 используются при построении решения уравнений (0.1), (0.2).

После применения преобразования Фурье исходная система интегро-дифференциальных уравнений переходит в систему интегральных уравнений относительно $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v)$, $\widehat{\mathcal{E}}(\zeta)$, решение которой в п. 3.2 найдено в явном виде, см. теорему 2.4. В п. 3.3 § 3 данной главы вычислено обратное преобразование Фурье от

$\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v), \widehat{\mathcal{E}}(\zeta)$ и, тем самым, найдено общее решение системы (0.1), (0.2) в явном аналитическом виде, см. теорему 2.5.

§2. Преобразование Фурье комплексных сингулярных обобщенных функций специального вида

2.1. Пространство D основных функций и пространство D' обобщенных функций.

2.1.1. Основные понятия. Согласно [42, 134], функции $f(x)$, которые определены на $(-\infty, +\infty)$ и интегрируемы по Лебегу на любом конечном отрезке $[a; b]$ вещественной прямой, будем называть *обычными функциями*. Множество таких функций замкнуто относительно операций сложения и умножения на вещественное число и образует линейное пространство. Как отмечено в [134], в этом пространстве можно выполнять операции предельного перехода.

Назовем *основными функциями* такие функции $\varphi(x)$, которые обращаются в нуль вне некоторой ограниченной области и имеют непрерывные производные любого порядка. Эту область называют *носителем* функции и обозначают $\text{supp } \varphi(x)$. Множество функций $\varphi(x)$ также образует линейное пространство, которое назовем *основным пространством D* . В пространстве D можно ввести операцию предельного перехода.

Последовательность функций $\{\varphi_k(x)\}$ называется *сходящейся в пространстве D к нулю*, если все функции $\varphi_k(x)$ обращаются в нуль вне одного и того же отрезка $[-a, a]$ и равномерно сходятся к нулю вместе со всеми своими производными $\partial^m \varphi / \partial x^m$. Это определение позволяет ввести понятие предела основной функции. Последовательность основных функций $\varphi_k(x)$ *сходится в пространстве D к функции $\varphi(x)$* , если $\varphi(x) \in D$ и разность $\varphi_k(x) - \varphi(x)$ стремится в D к нулю.

Любой обычной функции f можно с помощью основной функции $\varphi \in D$ поставить в соответствие число, обозначаемое (f, φ) , которое определяется по

формуле

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx. \quad (2.1)$$

Заданный с помощью равенства (2.1) функционал обладает свойством линейности и непрерывности по аргументу φ .

Расширим возможности определения линейного функционала. Будем говорить, что на пространстве D задан *линейный непрерывный функционал* f , если задано правило, по которому можно вычислить значение (f, φ) и выполняются свойства линейности и непрерывности.

Множество всех *линейных непрерывных функционалов*, построенных на пространстве основных функций D , образуют линейное пространство, которое называют пространством *обобщенных функций* и обозначают D' .

Последовательность обобщенных функций $f_1, f_2, \dots, f_k, \dots$ называется сходящейся к обобщенной функции f в пространстве D' , если для каждой основной функции φ из пространства D верно [134, с. 61]

$$(f, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, \varphi).$$

Отметим, что операция предельного перехода в пространстве D' линейна. Пространство обобщенных функций является полным относительно введенной в нем сходимости [134, с. 65].

Если значение (f, φ) представимо в виде интеграла (2.1), то говорят, что f — *регулярная* обобщенная функция, или просто *регулярная* функция, если (f, φ) не представимо в виде интеграла (2.1), то обобщенную функцию называют *сингулярной*.

Заметим, что для обобщенных функций можно ввести понятие производной по правилу

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi').$$

Функционалы $f \in D'$ являются бесконечно дифференцируемыми, причем производная $f^{(n)}$ порядка n определяется равенством:

$$(f^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (f, \varphi^{(n)}).$$

Такое равенство для обычных функций f является аналогом формулы интегрирования по частям.

2.1.2 Комплексные обобщенные функции. Наряду с вещественными основными функциями будем рассматривать комплекснозначные основные функции $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – бесконечно дифференцируемые вещественные функции с конечным носителем. Множество таких функций замкнуто относительно операций сложения и умножения на комплексные числа и образует линейное пространство, которое так же, как и в вещественном случае, будем обозначать D .

Далее рассмотрим некоторые теоретические положения, справедливые для комплексных обобщенных функций.

Замечание 2.1. Функционал, который определяет вещественную регулярную функцию, имеет вид интеграла (2.1). Для комплексных регулярных обобщенных функций соответствующий функционал можно по формуле (2.1), а кроме того, можно использовать формулы следующего вида:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} \varphi(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\varphi(x)} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x) \varphi(x)} dx,$$

где черта означает операцию комплексного сопряжения. В данной работе для комплексных обобщенных функций будет применяться функционал вида (2.1).

Для сингулярных обобщенных функций будет использоваться запись вида (f, φ) . Пространство всех линейных непрерывных функционалов, построенных на комплексных основных функциях из пространства D , будем обозначать, как и в вещественном случае, через D' .

Отметим, что для каждого из четырех видов функционалов будет выполняться равенство для сопряженных функций, см. [134]:

$$(\overline{f}, \varphi) = \overline{(f, \overline{\varphi})}. \quad (2.2)$$

Следуя [134], равенство (2.2) будем использовать далее в качестве определения обобщенной функции $\overline{f}$, сопряженной к обобщенной функции f .

2.1.3. Умножение на функцию $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Пусть $f \in D'$ и $\varphi \in D$ — соответственно обобщенная и основная функции, а кроме того, пусть $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Тогда обобщенная функция, являющаяся произведением $a(x)f(x)$, определяется с помощью следующего равенства

$$(a(x)f(x), \varphi(x)) = (f(x), a(x)\varphi(x)).$$

Таким образом, умножение на бесконечно дифференцируемую функцию $a(x)$ определено для любой обобщенной функции $f \in D'$.

2.1.4. Интегрирование по параметру. Рассмотрим случай, когда обобщенная функция зависит от комплексного параметра μ , принадлежащего области $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}$, т.е. каждому $\mu \in \mathcal{M}$ можно поставить в соответствие функцию $f(x, \mu)$. Пользуясь полнотой пространства обобщенных функций D' (см. [42, с. 188]), можно ввести понятие непрерывности по параметру и интеграла по параметру.

Обобщенная функция $f(x)$ называется *пределом функций* $f(x, \mu)$ при стремлении $\mu \rightarrow \mu_0$, если значение соответствующего функционала (числовая функция) $(f(x, \mu), \varphi(x))$ стремится к значению функционала $(f(x), \varphi(x))$ для всех $\varphi \in D$

$$\lim_{\mu \rightarrow \mu_0} (f(x, \mu), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x)).$$

Функция $f(x, \mu)$ называется *непрерывной по параметру* μ в области $\mathcal{M}$, если для каждой точки $\mu_0 \in \mathcal{M}$ верно равенство

$$f(x, \mu_0) = \lim_{\mu \rightarrow \mu_0} f(x, \mu).$$

Непрерывные по параметру обобщенные функции можно интегрировать по этому параметру (см. [42]).

Определение 1. Пусть функционал $f(x, \mu) \in D'$ непрерывно зависит от параметра $\mu \in \mathcal{M} \subset \mathbb{C}$ и s_n — интегральные суммы вида

$$s_n = \sum_{j=1}^n f(x, \mu_j^*) \Delta \mu_j,$$

где $[\mu_{j-1}, \mu_j]$ – отрезки, соединяющие точки контура $L \in \mathcal{M}$, $\mu_j^* \in (\mu_{j-1}, \mu_j)$, $\Delta\mu_j = |\mu_j - \mu_{j-1}|$. Если при $\max \Delta\mu_j \rightarrow 0$ (соответственно $n \rightarrow +\infty$) существует предел в Z'

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \mathfrak{J}_f,$$

не зависящий от способа разбиения спрямляемой кривой L и выбора точек μ_j^* , то $\mathfrak{J}_f$ называют *интегралом по параметру по контуру L от $f(x, \mu)$* и пишут

$$\mathfrak{J}_f = \int_L f(x, \mu) d\mu. \quad (2.3)$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\left(\int_L f(x, \mu) d\mu, \psi(x) \right) = \int_L (f(x, \mu), \psi(x)) d\mu, \quad (2.4)$$

где $(f(x, \mu), \psi(x))$ – результат действия функционала $f(x, \mu)$ на функцию $\psi \in Z$. Действительно, согласно определению предела в пространстве Z' имеем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \lim_{\max \Delta\mu_j \rightarrow 0} (s_n, \psi) &= \lim_{\max \Delta\mu_j \rightarrow 0} \left(\sum_{j=1}^n f(x, \mu_j^*) \Delta\mu_j, \psi(x) \right) = \\ &= \lim_{\max \Delta\mu_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n (f(x, \mu_j^*), \psi(x)) \Delta\mu_j = \int_L (f(x, \mu), \psi) d\mu. \end{aligned}$$

2.1.5. Решение уравнений с обобщенными функциями. Напомним представление решения элементарного алгебраического уравнения в пространстве обобщенных функций. Рассмотрим уравнение

$$f_0(p)X(p) = f(p), \quad p \in \mathbb{C}, \quad (2.5)$$

где $X(p)$ – неизвестная обобщенная функция, $f(p)$ – известная обобщенная функция, $f_0(p)$ является аналитической функцией, имеющей m нулей $p_1, p_2, \dots, p_m$ порядка $n_1, n_2, \dots, n_m$ соответственно, т.е. f_0 можно представить в виде

$$f_0(p) = (p - p_1)^{n_1} (p - p_2)^{n_2} \dots (p - p_m)^{n_m} \tilde{f}(p), \quad \tilde{f}(p) \neq 0. \quad (2.6)$$

Опираясь на теорию [33, с. 112], [43, с. 130] будем говорить, что

Утверждение 2.2. Функционал

$$X(p) = \frac{f(p)}{f_0(p)} + \sum_{k=1}^m \sum_{s=0}^{n_k-1} C_{ks} \delta^{(s)}(p - p_k), \quad (2.7)$$

где C_{ks} – произвольные константы, является решением уравнения (2.5), если существует функционал $f(p)/f_0(p)$.

Условия существования функционала $f(p)/f_0(p)$ в общем случае в данной работе рассматривать не будем. В § 3 будет показано, что такой функционал существует для рассматриваемой задачи.

2.2. Пространства Z и Z' образов Фурье пространств D и D' .

2.2.1. Пространство образов Фурье основных и обобщенных функций. Преобразование Фурье основной функции φ из пространства D имеет вид

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{i\zeta x} dx,$$

где аргумент $\zeta = \sigma + i\tau$ функции $\psi(\zeta)$ может принимать любые комплексные значения. Поскольку φ является финитной, т.е. $\varphi^{(k)} = 0$, $k = 0, 1, \dots$ при $|x| > a$, то для функций $\psi(\zeta)$ имеет место следующая оценка ([42, с. 195], [134, с. 125])

$$|\zeta|^q |\psi(\zeta)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} \varphi^{(q)}(x) e^{i\zeta x} dx \right| \leq C_q e^{a|\tau|}.$$

Отсюда вытекает, что преобразование Фурье $\psi(\zeta)$ каждой основной функции $\varphi(x) \in D$, обращающейся в нуль при $|x| \geq a$, есть целая аналитическая функция переменного $\zeta = \sigma + i\tau$, удовлетворяющая при каждом $q = 0, 1, 2, \dots$ неравенству

$$|\zeta^q \psi(\zeta)| \leq C_q e^{a|\tau|}. \quad (2.8)$$

Верно и обратное: всякая целая функция $\psi(\zeta)$, удовлетворяющая при каждом q неравенству (2.8), есть преобразование Фурье некоторой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$, обращающейся в нуль при $|x| \geq a$.

Множество всех целых функций, удовлетворяющих неравенству (2.8), является линейным пространством, которое называют пространством Z . Преобразование Фурье устанавливает взаимнооднозначное соответствие между пространствами D и Z [42, 134].

Тем же способом, каким были введены функционалы D' на основных функциях из D , можно ввести линейные непрерывные функционалы на функциях из пространства Z .

Пусть $f(x)$ — абсолютно интегрируемая функция, а $g(\zeta)$ — ее преобразование Фурье. Для сопряженных функций $f(x)$ и $g(\zeta)$ верно равенство (см. [42]):

$$(\bar{g}, \psi) = (\bar{f}, \varphi). \quad (2.9)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (\bar{f}, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\zeta) e^{-i\zeta x} d\zeta \right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\zeta) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} e^{i\zeta x} dx \right) d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(\zeta)} \psi(\zeta) d\zeta = (\bar{g}, \psi). \end{aligned}$$

Равенство (2.9) может служить определением обобщенной функции $g(\zeta)$, построенной на основных функциях из пространства Z , и являющейся Фурье-образом обобщенной функции $f(x)$ (регулярной или сингулярной), построенной на основных функциях из пространства D . Функционалы (g, ψ) и $(\bar{g}, \psi)$ определены на всех ψ из пространства Z и являются линейными и непрерывными. Пространство функционалов (f, φ) мы обозначили как D' , а соответствующее пространство их образов Фурье (g, ψ) назовем пространством Z' .

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.3. *Между пространствами функционалов D' и Z' существует взаимнооднозначное соответствие.*

Изоморфизм пространств D' и Z' вытекает из рассуждений, приведенных перед формулировкой настоящего утверждения, см. [3, с. 59], [42, с. 209], [134, с. 131].

Данное утверждение позволяет с помощью преобразования Фурье свести исходную задачу к задаче в пространстве Z' .

Замечание 2.2. Функционалу из пространства D' соответствует образ Фурье из пространства Z' , но в отличие от функционалов из D' , функционалы из

Z' не только бесконечно дифференцируемы, но и аналитичны.

Замечание 2.3. Как и в случае пространства D' в пространстве Z' *регулярные функционалы* можно записать в виде

$$(g, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\zeta)\psi(\zeta)d\zeta.$$

Однако и регулярные, и сингулярные обобщенные функции из Z' можно представлять с помощью аналитических функционалов вида

$$(g, \psi) = \int_L g(s)\psi(s)ds, \quad (2.10)$$

где L – некоторый контур на комплексной плоскости (не содержащий особых точек функции g). Например, дельта-функция, которую нельзя записать в виде регулярного функционала, может быть представлена с помощью аналитического функционала:

$$(\delta(s - s_0), \psi(s)) = \psi(s_0) = \int_L \frac{\psi(s)ds}{s - s_0},$$

где функция $\psi(s)$ принадлежит пространству Z .

Замечание 2.4. В литературе при описании свойств интегральных преобразований встречается пространство S – пространство бесконечно дифференцируемых функций, которые на бесконечности стремятся к нулю быстрее любой степени $1/|x|$ вместе со всеми производными, т.е.

$$|x^k \varphi^{(q)}(x)| \leq C_{kq}, \quad \forall k, q.$$

Заметим, что пространство D является подмножеством S и всюду плотно в нем, а множество соответствующих S функционалов, которые можно обозначить S' , наоборот, является подмножеством D' [42] .

В настоящей работе используются пространства D , Z , D' и Z' . Решение исходной системы уравнений ищется в пространстве D' . После применения к уравнениям преобразования Фурье получается система уравнений, решение которых

ищется в пространстве Z' . В результате обратного преобразования Фурье происходит обратный переход между пространствами Z' и D' , в результате чего функции, являющиеся решением системы, принадлежат пространству D' . Как указывалось выше, если они представимы в виде интеграла, то их можно называть регулярными функциями.

2.2.2 Линейные преобразования аргумента комплексных обобщенных функций. Пусть $f \in D'$ и $\varphi \in D$ — соответственно обобщенная и основная комплекснозначные функции, функция f определена на всей комплексной плоскости и интегрируема на любом конечном отрезке плоскости. Предположим, что f — регулярная обобщенная функция. Определим функцию вида $f(ax + b)$, где a и b — комплексные постоянные:

$$(f(ax + b), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax + b)\varphi(x)dx = \frac{1}{a} \int_{\Gamma} f(y)\varphi\left(\frac{y-b}{a}\right) dy.$$

Новый контур интегрирования, обозначенный Γ , представляет из себя прямую на комплексной плоскости, проходящую через точку b и пересекающую вещественную ось под углом, равным $\arg a$. Заметим, что носитель основной функции не изменился, при каждом значении y значение аргумента основной функции равно прежним значениям аргумента на вещественной оси. Изменился аргумент обобщенной функции, т.е. изменились точки, в которых берутся значения функции f .

Для сингулярных обобщенных функций в случае линейного преобразования аргумента будем использовать следующую формулу:

$$(f(ax + b), \varphi(x)) = \frac{1}{a} \left(f(y), \varphi\left(\frac{y-b}{a}\right) \right)_{\Gamma}. \quad (2.11)$$

Индекс Γ в данной записи означает, что значения функции f берутся в точках, расположенных на контуре Γ .

2.2.3 Пример. Дана функция $\delta(A - i\zeta v) \in Z'$, где A — комплексное число, ζ — комплексная переменная, от которой зависит функция, v — вещественный

параметр. Представим функцию в виде $\delta(\zeta - h)$.

$$\begin{aligned} (\delta(A - i\zeta v), \psi(\zeta)) &= \frac{1}{-iv} (\delta(\zeta), \psi(\zeta + A/iv))_{\Gamma} = \\ &= \frac{1}{-iv} (\delta(\zeta - A/iv), \psi(\zeta))_{\Gamma} = \frac{i\psi(A/iv)}{v}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\delta(A - i\zeta v) = \frac{1}{-iv} \delta(\zeta - A/iv). \quad (2.13)$$

где носитель Γ , на котором будут выбираться точки, равные A/iv , это прямая, проходящая через начало координат под углом $\arg(-iv)$ к вещественной оси.

2.2.4 Умножение функций из пространства Z' . Аналогично правилу умножения функций из D' для функций из пространства Z' надо потребовать, чтобы при умножении сохранялись свойства линейности и непрерывности. Обобщенную функцию $g(\zeta)$ из Z' можно умножить на некоторую комплексную обычную функцию $b(\zeta)$, если будет выполняться равенство

$$(b(\zeta)g(\zeta), \psi(\zeta)) = (g(\zeta), b(\zeta)\psi(\zeta)).$$

Это значит, что функция $b(\zeta)\psi(\zeta)$ должна принадлежать пространству Z . В таком случае функцию $b(\zeta)$ будем называть *мультипликатором*. Функция является мультипликатором, если она является целой аналитической функцией и удовлетворяет при некоторых s, q, C неравенству (см. [42]):

$$|b(\zeta)| \leq Ce^{c|\tau|}(1 + |\zeta|)^q. \quad (2.14)$$

Заметим, что функция $b(\zeta)$, являясь мультипликатором, является бесконечно дифференцируемой функцией, поэтому на аналогичную функцию $b(x)$ разрешено умножение в пространстве D' .

Заметим, что если непрерывно зависящая от параметра μ функция $f(\zeta, \mu)$ принадлежит пространству Z' , то ее можно интегрировать по этому параметру (в смысле определения 1) и интеграл по параметру μ (если он существует) будет являться обобщенной функцией из пространства Z' .

2.2.5. Образы и прообразы Фурье некоторых функций.

Напомним вывод (см. [42]) обратного преобразования Фурье от дельта-функции с помощью формулы (2.9):

$$\begin{aligned} (\overline{F[1]}, F[\varphi]) &= (\bar{1}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ix0} dx = \sqrt{2\pi} \psi(0) = \sqrt{2\pi} (\delta, \psi) = (\sqrt{2\pi} \delta, \psi). \end{aligned}$$

Получаем:

$$F[1] = \sqrt{2\pi} \delta(p), \quad F^{-1}[\delta(p)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (2.15)$$

Далее укажем правило, по которому находится образ Фурье для функций, являющихся интегралом по параметру от обобщенных функций.

Определение 2. Будем говорить, что функция $k(s)$ принадлежит классу $\mathfrak{K}$, если она является вещественной, бесконечно дифференцируемой, при $s \rightarrow \pm\infty$ убывает как $\mathcal{O}(e^{-as^2})$, $a > 0$, и удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(s) ds = 1. \quad (2.16)$$

Утверждение 2.4. Пусть функция $k(s)$ принадлежит классу $\mathfrak{K}$, $f(x, s)$ — обобщенная функция из D' , непрерывно зависящая от параметра $s \in (-\infty, +\infty)$, и существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, s) k(s) ds, \quad (2.17)$$

понимаемый как элемент D' . Тогда преобразование Фурье интеграла (2.17) принадлежит Z' и имеет вид

$$F \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, s) k(s) ds \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\zeta, s) k(s) ds, \quad (2.18)$$

где $\hat{f}(\zeta, s) = F[f(x, s)]$ — преобразование Фурье $f(x, s)$, являющееся элементом пространства Z' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся определением интеграла по параметру

(2.3) и представим интеграл по параметру как предел интегральных сумм

$$\begin{aligned}
F \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, s) k(s) ds \right] &= F \left[\lim_{N_1, N_2 \rightarrow +\infty} \int_{-N_1}^{N_2} f(x, s) k(s) ds \right] = \\
&= F \left[\lim_{N_1, N_2 \rightarrow +\infty} \lim_{\max \Delta s_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(x, s_j) k(s_j) \Delta s_j \right] = \\
&= \lim_{N_1, N_2 \rightarrow \infty} \lim_{\max \Delta s_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n F[f(x, s_j)] k(s_j) \Delta s_j.
\end{aligned}$$

Действие функционала на основную функцию φ тоже может быть записано с помощью предела

$$\begin{aligned}
F \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, s) k(s) ds, \varphi(x) \right) \right] &= \\
&= \lim_{N_1, N_2 \rightarrow \infty} \lim_{\max \Delta s_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n (F[f(x, s_j), \varphi(x)]) k(s_j) \Delta s_j.
\end{aligned}$$

Далее воспользуемся определением преобразования Фурье — равенством (2.9), из которого следует, что $(\hat{f}(\zeta, s_j), \psi(\zeta)) = (f(x, s_j), \varphi(x))$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{N_1, N_2 \rightarrow \infty} \lim_{\max \Delta s_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n F[f(x, s_j)] k(s_j) \Delta s_j = \\
&= \lim_{N_1, N_2 \rightarrow \infty} \lim_{\max \Delta s_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \hat{f}(\zeta, s_j) k(s_j) \Delta s_j = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\zeta, s) k(s) ds.
\end{aligned}$$

Таким образом, справедлива формула

$$F \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, s) k(s) ds \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\zeta, s) k(s) ds, \quad (2.19)$$

которая и составляет требуемое утверждение.

2.3. Обратное преобразование Фурье некоторых обобщенных функций из Z' .

2.3.1. Обратное преобразование Фурье дельта-функции и ее производных. При решении краевой задачи возникают выражения с дельта-функциями, являющимися функционалами в пространстве Z' . Поэтому рассмотрим подробно, как вычисляется обратное преобразование Фурье для получившихся выражений.

Для поиска обратного преобразования Фурье для дельта-функции со сдвигом надо воспользоваться разложением в ряд [42]. Поэтому сначала найдем образы степенных функций. Операции дифференцирования в пространстве D' соответствует умножение на $-i\zeta$ в пространстве Z' , и наоборот, операции дифференцирования в пространстве Z' соответствует операция умножения на ix в пространстве D' .

$$P \left(\frac{d}{d\zeta} F[f] \right) = F [P(ix)f] \quad (2.20)$$

или

$$F [P(x)f] = P \left(-i \frac{d}{d\zeta} \right) F[f].$$

Найдем Фурье-образ от многочлена

$$F [P(x)] = F [P(x) \cdot 1] = P \left(-i \frac{d}{d\zeta} \right) F[1] = P \left(-i \frac{d}{d\zeta} \right) \sqrt{2\pi} \delta(\zeta),$$

т.е. $F[x] = \sqrt{2\pi}(-i)\delta'(\zeta)$, $F[x^2] = \sqrt{2\pi}(-i)^2\delta''(\zeta)$, ..., $F[x^q] = \sqrt{2\pi}(-i)^q\delta^{(q)}(\zeta)$.

Для нахождения прообраза дельта-функции со сдвигом, надо записать ее в виде бесконечного ряда [42]:

$$\delta(\zeta + \zeta_0) = \sum_{q=0}^{\infty} \delta^{(q)}(\zeta) \frac{\zeta_0^q}{q!},$$

записать ряд для показательной функции

$$e^{i\zeta_0 x} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(i\zeta_0)^q x^q}{q!},$$

выполнить над ней путем почленного применения преобразование Фурье и сравнить Фурье-образ показательной функции с разложением дельта-функции. Получаем:

$$F[e^{i\zeta_0 x}] = \sqrt{2\pi} \delta(\zeta + \zeta_0).$$

Это позволит записать формулу для дельта-функции со сдвигом:

$$F^{-1}[\delta(\zeta - \zeta_0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\zeta_0 x}. \quad (2.21)$$

Опираясь на формулу (2.20), можно записать выражение для производной любого порядка от функции $\delta(\zeta - \zeta_0)$

$$F^{-1}[\delta^{(s)}(\zeta - \zeta_0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(ix)^s e^{-i\zeta_0 x}. \quad (2.22)$$

2.3.2 Произведение дельта-функции на обычную функцию $h(\zeta)$. Как говорилось выше, в пространствах обобщенных D' и Z' для введения операции умножения обобщенных функций на некоторые функции ($a(x)$ и $b(x)$ соответственно) на функции-множители накладываются сильные ограничения. Так, в пространстве D' для того, чтобы ввести операцию умножения любой обобщенной функции $f(x)$ на $a(x)$, функция $a(x)$ должна быть бесконечно дифференцируема. В пространстве Z' для того, чтобы умножить любую обобщенную функцию $g(\zeta)$ на некоторую функцию $b(\zeta)$, последняя должна являться мультипликатором (т.е. должна быть целой аналитической функцией ограниченного роста, см. п. 2.2). В данной работе требуется найти обратное преобразование Фурье для функций вида $h(\zeta)\delta(\zeta - h)$, когда функция $h(\zeta)$ не удовлетворяет условиям, накладываемым на функции $a(x)$ и $b(\zeta)$.

Свойства обобщенной функции $\delta(\zeta - h)$ позволяют смягчить требования к функции $h(\zeta)$. Введем в пространстве Z' операцию умножения дельта-функции на некоторую функцию $h(\zeta)$ по следующему правилу и потребуем от функции $h(\zeta)$, чтобы в точке ζ_0 она была определена и имела конечное значение.

Определение 3. Будем считать *произведением $h(\zeta)$ на $\delta(\zeta - \zeta_0)$* функционал, записанный как $h(\zeta)\delta(\zeta - \zeta_0)$ и вычисляемый по правилу

$$(h(\zeta)\delta(\zeta - \zeta_0), \psi(\zeta)) = h(\zeta_0)\psi(\zeta_0). \quad (2.23)$$

Очевидно, что этот функционал является линейным и непрерывным и принадлежит пространству Z' .

Введенная операция позволяет найти обратное преобразование Фурье от функции вида $h(\zeta)\delta(\zeta - \zeta_0)$.

Утверждение 2.5. *Обратное преобразование Фурье для функции $h(\zeta)\delta(\zeta -$*

ζ_0), где $h(\zeta)$ определена в точке ζ_0 , вычисляется по формуле

$$F^{-1}[h(\zeta)\delta(\zeta - \zeta_0)] = \frac{h(\zeta_0)e^{-i\zeta_0 x}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (2.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся формулой для образов Фурье (2.9) и формулами (2.21), (2.23)

$$\begin{aligned} (\overline{h(\zeta)\delta(\zeta - \zeta_0)}, \psi(\zeta)) &= \overline{h(\zeta_0)}(\overline{\delta(\zeta - \zeta_0)}, \psi(\zeta)) = \overline{h(\zeta_0)}(\overline{\delta(\zeta - \zeta_0)}, \psi(\zeta)) = \\ &= \overline{h(\zeta_0)} \left(\frac{e^{-i\zeta_0 x}}{\sqrt{2\pi}}, \varphi(x) \right) = \left(\frac{h(\zeta_0)e^{-i\zeta_0 x}}{\sqrt{2\pi}}, \varphi(x) \right). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Утверждение 2.6. Для сингулярной обобщенной функции, зависящей от параметра и имеющей вид $g(\mu)\delta(A - i\zeta\mu)$, при условии, что выражение $g(\mu)/(-i\mu)$ принимает конечное значение, верна следующая формула:

$$F^{-1}[g(\mu)\delta(A - i\zeta\mu)] = \frac{ig(\mu)e^{-Ax/\mu}}{\mu\sqrt{2\pi}}. \quad (2.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся результатами примера из п. 2.2.3.

$$\frac{1}{-i\mu} \left(\delta \left(\zeta - \frac{A}{i\mu} \right), g(\mu)\psi(\zeta) \right) = \frac{1}{-i\mu} g(\mu)\psi \left(\frac{A}{i\mu} \right).$$

Заметим, что в данном случае функция $g(\mu)$ не обязательно должна быть мультипликатором, т.к. она зависит не от переменной ζ , а от параметра μ .

Пользуясь формулой (2.21), найдем обратное преобразование Фурье

$$\begin{aligned} F^{-1}[g(\mu)\delta(A - i\zeta\mu)] &= F^{-1} \left[\frac{g(\mu)}{-i\mu} \delta \left(\zeta - \frac{A}{i\mu} \right) \right] = \\ &= -\frac{g(\mu)}{i\mu} F^{-1} \left[\delta \left(\zeta - \frac{A}{i\mu} \right) \right] = \frac{ig(\mu)e^{-Ax/\mu}}{\mu\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

2.3.3. Обратное преобразование Фурье от интеграла по параметру. Рассмотрим функционал $g(\zeta, v)$, $\zeta \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{R}$, определенный по следующей формуле:

$$g(\zeta, v) = g_1(\zeta, v) \int_{-\infty}^{+\infty} g_0(\mu)\delta(A - i\mu\zeta)d\mu, \quad (2.26)$$

где $g_1(\zeta, v)$ и $g_0(v)$ – обычные функции, условия на которые будут уточнены далее, такие, что $g(\zeta, v) \in Z'$.

Определение 4. Введем функционал $\mathfrak{J}_0(\zeta)$ по формуле:

$$\mathfrak{J}_0(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\mu) \delta(A - i\mu\zeta) d\mu, \quad (2.27)$$

где $\zeta, A \in \mathbb{C}$, $g_0(\mu)$ – функция вещественного параметра μ , а интеграл понимается в смысле определения 1.

Согласно (2.4), действие $\mathfrak{J}_0$ на основную функцию из пространства Z осуществляется по формуле

$$(\mathfrak{J}_0(\zeta), \psi(\zeta)) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} g_0(\mu) \delta(A - i\mu\zeta) d\mu, \psi(\zeta) \right). \quad (2.28)$$

Определим условия, накладываемых на функцию $g_0(\mu)$, достаточные для того, чтобы данный функционал принадлежал пространству Z' .

Введем класс функций $\mathfrak{G}_0$. Пусть дана некоторая функция $g_0(\mu)$ из пространства обычных функций.

Определение 5. Будем говорить, что функция $g_0(\mu)$ принадлежит классу $\mathfrak{G}_0$, если она при всех $\mu \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяет условию Гельдера H_α с некоторым $\alpha \in (0, 1)$ и имеет следующие асимптотики: $g_0(\mu) = \mathcal{O}(e^{-c|A/\mu|})$, $c > 0$ при $\mu \rightarrow 0$, а на бесконечности убывает быстрее любой степени μ , т.е. $g_0(\mu) = o(1/\mu^k)$, $k > 0$ при $\mu \rightarrow \infty$.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть функция $g_0(\mu)$ принадлежит классу $\mathfrak{G}_0$. Тогда функционал $\mathfrak{J}_0(\zeta)$, определенный по формуле (2.27), принадлежит пространству Z' и действует на основную функцию из пространства Z по формуле

$$(\mathfrak{J}_0(\zeta), \psi(\zeta)) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_0(\mu)}{\mu} \psi\left(\frac{A}{i\mu}\right) d\mu. \quad (2.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем выражение согласно формуле (2.4)

$$\begin{aligned}
& \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_0(\mu) \delta(A - i\mu\zeta) d\mu, \psi(\zeta) \right) = \\
& = \lim_{N_1, N_2 \rightarrow +\infty} \left(\int_{-N_1}^{N_2} g_0(\mu) \delta(A - i\mu\zeta) d\mu, \psi(\zeta) \right) = \\
& = \lim_{N_1, N_2 \rightarrow +\infty} \lim_{\max \Delta\mu_j \rightarrow 0} \left(\sum_{j=1}^n g_0(\mu_j^*) \delta(A - i\mu_j^* \zeta) \Delta\mu_j, \psi(\zeta) \right) = \\
& = \lim_{N_1, N_2 \rightarrow +\infty} \lim_{\max \Delta\mu_j \rightarrow 0} \left(\sum_{j=1}^n \frac{g_0(\mu_j^*)}{-i\mu_j^*} \delta \left(\zeta - \frac{A}{i\mu_j^*} \right) \Delta\mu_j, \psi(p) \right) = \\
& = \lim_{N_1, N_2 \rightarrow +\infty} \lim_{\max \Delta\mu_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \frac{g_0(\mu_j^*)}{-i\mu_j^*} \Delta\mu_j \psi \left(\frac{A}{i\mu_j^*} \right) = \\
& = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_0(\mu)}{\mu} \psi \left(\frac{A}{i\mu} \right) d\mu.
\end{aligned}$$

Таким образом, для любой основной функции $\psi(\zeta)$ из пространства Z действие функционала $\mathfrak{J}_0(\zeta)$ определяется равенством (2.29):

$$(\mathfrak{J}_0(\zeta), \psi(\zeta)) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_0(\mu)}{\mu} \psi \left(\frac{A}{i\mu} \right) d\mu.$$

Рассмотрим интеграл (2.29). Нетрудно видеть, что если он существует, то обладает свойствами линейности и непрерывности по аргументу ψ . Для доказательства принадлежности его к пространству Z' необходимо доказать сходимость.

Функция $\psi(\zeta)$, являющаяся образом Фурье основной функции $\varphi(x) \in D$, обращающейся в нуль при $|x| \geq a$, сама является целой аналитической функцией и удовлетворяет при каждом $q = 0, 1, 2, \dots$ неравенству (2.8) (см. пункт 2.2.1)

$$|\zeta^q \psi(\zeta)| \leq C_q e^{a|\tau|},$$

где τ — мнимая часть аргумента $\zeta = \sigma + i\tau$.

При изменении аргумента на значение $A/i\mu$ оценка (2.8) дает результат

$$\left| \frac{A}{\mu} \right|^q \cdot \left| \psi \left(\frac{A}{i\mu} \right) \right| \leq C_q e^{a|A/\mu|},$$

$$\left| \psi \left(\frac{A}{i\mu} \right) \right| \leq |\mu|^q \widetilde{C}_q e^{a|A/\mu|}.$$

Подынтегральная функция в (2.29) оценивается следующим образом

$$\left| \frac{g_0(\mu)}{\mu} \psi \left(\frac{A}{i\mu} \right) \right| = \left| \frac{g_0(\mu)}{\mu} \right| \cdot \left| \psi \left(\frac{A}{i\mu} \right) \right| \leq |g_0(\mu)| \cdot |\mu|^{q-1} \widetilde{C}_q e^{a|A/\mu|}.$$

Напомним, что функция $g_0(\mu)$ определена и ограничена при всех значениях аргумента. На сходимость интеграла (2.29) влияет поведение подынтегральной функции при $\mu \rightarrow 0$ и при $\mu \rightarrow \pm\infty$. В нуле бесконечно быстро растет оценка $e^{a|A/\mu|}$. Но по условию, если функция g_0 принадлежит классу $\mathfrak{G}_0$, то она является $\mathcal{O}(e^{-c|A/\mu|})$, тогда произведение $g_0(\mu)\psi(A/i\mu)$ ограничено и особенности в нуле не возникает.

Принадлежность функции g_0 к классу $\mathfrak{G}_0$ также обеспечивает и удовлетворительную оценку при $\mu \rightarrow \pm\infty$. На бесконечности $g_0(\mu) = o(1/\mu^k)$ и произведение функций $|g_0(\mu)| \cdot |\mu|^{q-1}$ стремится к нулю достаточно быстро, чтобы интеграл сходился при всех значениях q .

Таким образом, принадлежность функции g_0 к классу $\mathfrak{G}_0$ – достаточное условие сходимости интеграла (2.29) и, следовательно, существования линейного непрерывного функционала $\mathfrak{J}_0(\zeta)$, принадлежащего пространству Z' .

Теорема доказана.

Далее рассмотрим функцию $g_1(\zeta, v)$ и ее произведение на интеграл (2.29). Функция $g_1(\zeta, v)$ зависит от комплексного аргумента ζ и от вещественного параметра v . Введем класс функций $\mathfrak{G}_1$.

Определение 6. Будем говорить, что функция $g_1(\zeta, v)$ принадлежит классу $\mathfrak{G}_1$, если относительно комплексного аргумента ζ это однозначная функция, ограниченная на бесконечности и определенная на всей комплексной плоскости за исключением, возможно, точек, в которых она может быть представлена в

виде

$$g_1(\zeta, v) = \frac{h(\zeta, v)}{A - i\zeta v}, \quad (2.30)$$

где $h(\zeta, v)$ – гёльдерова функция.

Определение 7. Введем функционал $\mathfrak{J}(\zeta, v)$ по следующей формуле:

$$\mathfrak{J}(\zeta, v) = g_1(\zeta, v) \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\mu) \delta(A - i\mu\zeta) d\mu, \quad (2.31)$$

где функция $g_0(\mu)$ принадлежит классу $\mathfrak{G}_0$, а функция $g_1(\zeta, v)$ принадлежит классу $\mathfrak{G}_1$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. Пусть функция $g_0(\mu) \in \mathfrak{G}_0$, а функция $g_1(\zeta, v) \in \mathfrak{G}_1$. Тогда функционал $\mathfrak{J}(\zeta, v)$, определенный по формуле (2.31), принадлежит пространству Z' и действует на основную функцию ψ из пространства Z по формуле

$$(\mathfrak{J}(\zeta, v), \psi(\zeta)) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_0(\mu)}{\mu} g_1\left(\frac{A}{i\mu}, v\right) \psi\left(\frac{A}{i\mu}\right) d\mu. \quad (2.32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся результатами теоремы 2.1 и представим интеграл, фигурирующий в (2.31) как функционал $\mathfrak{J}_0(\zeta)$. В теореме 2.1 было доказано, что $\mathfrak{J}_0 \in Z'$. Представим интеграл (2.31) в виде предела интегральных сумм

$$\begin{aligned} (\mathfrak{J}(\zeta, v), \psi(\zeta)) &= g_1(\zeta, v) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_0(\mu) \delta(A - i\mu\zeta) d\mu, \psi(\zeta) \right) = \\ &= g_1(\zeta, v) \lim_{N_1, N_2 \rightarrow +\infty} \left(\int_{-N_1}^{N_2} g_0(\mu) \delta(A - i\mu\zeta) d\mu, \psi(\zeta) \right) = \\ &= g_1(\zeta, v) \lim_{N_1, N_2 \rightarrow +\infty} \lim_{\max \Delta\mu_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n (g_0(\mu_j^*) \delta(A - i\mu_j^* \zeta) \Delta\mu_j, \psi(\zeta)) = \\ &= g_1(\zeta, v) \lim_{N_1, N_2 \rightarrow +\infty} \lim_{\max \Delta\mu_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \left(\frac{g_0(\mu_j^*)}{-i\mu_j^*} \delta\left(\zeta - \frac{A}{i\mu_j^*}\right) \Delta\mu_j, \psi(\zeta) \right). \end{aligned}$$

Значения $g_0(\mu_j^*) \Delta\mu_j / (-i\mu_j^*)$ не зависят от аргумента ζ , а являются некоторыми числовыми выражениями, зависящими от параметра, поэтому верно

$$\left(\frac{g_0(\mu_j^*)}{-i\mu_j^*} \delta\left(\zeta - \frac{A}{i\mu_j^*}\right) \Delta\mu_j, \psi(\zeta) \right) = \frac{g_0(\mu_j^*)}{-i\mu_j^*} \Delta\mu_j \left(\delta\left(\zeta - \frac{A}{i\mu_j^*}\right), \psi(\zeta) \right).$$

С другой стороны, значение $g_1(\zeta, v)$ не зависит от параметра μ , поэтому его можно внести под знак суммы. Функция $g_1(\zeta, v)$ не является мультипликатором, поэтому умножение $g_1(\zeta, v)$ на дельта-функцию проведем согласно формуле (2.23), см. п. 2.3.2, определение 3.

$$\begin{aligned} & \lim_{N_1, N_2 \rightarrow +\infty} \lim_{\max \Delta \mu_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \frac{g_0(\mu_j^*)}{-i\mu_j^*} \Delta \mu_j g_1(\zeta, v) \left(\delta \left(\zeta - \frac{A}{i\mu_j^*} \right), \psi(\zeta) \right) = \\ & = \lim_{N_1, N_2 \rightarrow +\infty} \lim_{\max \Delta \mu_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \frac{g_0(\mu_j^*)}{-i\mu_j^*} \Delta \mu_j g_1 \left(\frac{A}{i\mu_j^*}, v \right) \psi \left(\frac{A}{i\mu_j^*} \right) = \\ & = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_0(\mu)}{\mu} g_1 \left(\frac{A}{i\mu}, v \right) \psi \left(\frac{A}{i\mu} \right) d\mu. \end{aligned}$$

Получили, что действие функционала $\mathfrak{J}(\zeta, v)$ на основную функцию из пространства Z происходит по формуле (2.32)

$$(\mathfrak{J}(\zeta, v), \psi(\zeta)) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_0(\mu)}{\mu} g_1 \left(\frac{A}{i\mu}, v \right) \psi \left(\frac{A}{i\mu} \right) d\mu.$$

Докажем сходимость интеграла (2.32). Воспользуемся результатами теоремы 2.1. Подынтегральная функция оценивается следующим образом

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g_0(\mu)}{\mu} g_1 \left(\frac{A}{i\mu_j^*}, v \right) \psi \left(\frac{A}{i\mu} \right) \right| = \left| \frac{g_0(\mu)}{\mu} \right| \cdot \left| g_1 \left(\frac{A}{i\mu_j^*}, v \right) \right| \cdot \left| \psi \left(\frac{A}{i\mu} \right) \right| \leq \\ & \leq |g_0(\mu)| \cdot \left| g_1 \left(\frac{A}{i\mu_j^*}, v \right) \right| \cdot |\mu|^{q-1} \widetilde{C}_q e^{a|A/\mu|}. \end{aligned}$$

Напомним, что функция $g_1(\zeta, v)$ согласно (2.30) имеет вид

$$g_1(\zeta, v) = \frac{h(\zeta, v)}{A - i\zeta v},$$

где $h(\zeta, v)$ – гёльдерова функция.

Подставим вместо аргумента ζ выражение $A/i\mu$ и исследуем поведение функции $g_1(A/i\mu, v)$. При замене аргумента $\zeta = A/i\mu$ функция $g_1(\zeta, v)$ примет вид

$$g_1 \left(\frac{A}{i\mu}, v \right) = \frac{h(A/i\mu, v)}{A - ivA/i\mu} = \frac{h(A/i\mu, v)\mu}{A(\mu - v)}.$$

В знаменателе стоит разность двух вещественных параметров $\mu - v$, и это значит, что в общем смысле функция

$$\frac{g_0(\mu)}{\mu} g_1\left(\frac{A}{i\mu}, v\right) \psi\left(\frac{A}{i\mu}\right)$$

не будет интегрируемой на вещественной прямой. В таком случае будем использовать понятие интеграла в смысле главного значения по Коши [39, с. 23], а именно

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(v, \mu)}{\mu - v} d\mu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{v-\varepsilon} \frac{f(v, \mu)}{\mu - v} d\mu + \int_{v+\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(v, \mu)}{\mu - v} d\mu \right).$$

Если рассматривать интеграл (2.32) как интеграл в смысле главного значения по Коши, то требования к функциям g_0 и g_1 достаточны, чтобы значение функционала $(\mathfrak{J}(\zeta, v), \psi(\zeta))$ было конечным, а учитывая линейность и непрерывность по ψ , можно утверждать, что функционал $\mathfrak{J}(\zeta, v)$ принадлежит пространству Z' .

Теорема доказана.

Теорема 2.3. *Обратное преобразование Фурье от функционала $\mathfrak{J}(\zeta, v)$, определенного по формуле (2.31), дается равенством*

$$F^{-1} \left[g_1(\zeta, v) \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\mu) \delta(A - i\mu\zeta) d\mu \right] = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_0(\mu)}{\mu} g_1\left(\frac{A}{i\mu}, v\right) e^{-Ax/\mu} d\mu. \quad (2.33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим функционал $\mathfrak{J}(\zeta, v)$ в виде предела интегральных сумм:

$$\begin{aligned} g_1(\zeta, v) \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\mu) \delta(A - i\mu\zeta) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty, \max \Delta\mu_j \rightarrow 0} s_n = \\ &= \lim_{N_1, N_2 \rightarrow \infty} \lim_{\max \Delta\mu_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n g_1(\zeta, v) g_0(\mu_j^*) \delta(A - i\mu_j^* \zeta) \Delta\mu_j, \end{aligned}$$

где $\Delta\mu_j$ – элементы разбиения контура, максимум длины которых стремится к нулю, а μ_j^* – произвольно выбираемая точка на каждом элементе разбиения, в которой берется значение подынтегральной функции.

Рассмотрим на каждом элементе разбиения функцию-образ Фурье и применим обратное преобразование Фурье. Используя формулы (2.24) и (2.25) из утверждений 1 и 2, получаем

$$\begin{aligned}
& F^{-1} [g_1(\zeta, v) g_0(\mu_j^*) \delta(A - i\mu_j^* \zeta) \Delta\mu_j] = \\
& = F^{-1} \left[\left(-\frac{1}{i\mu_j^*} \right) g_1(\zeta, v) g_0(\mu_j^*) \delta \left(\zeta - \frac{A}{i\mu_j^*} \right) \Delta\mu_j \right] = \\
& = \left(-\frac{1}{i\mu_j^*} \right) g_0(\mu_j^*) \Delta\mu_j F^{-1} \left[g_1(\zeta, v) \delta \left(\zeta - \frac{A}{i\mu_j^*} \right) \right] = \\
& = \left(-\frac{1}{i\mu_j^*} \right) g_0(\mu_j^*) \Delta\mu_j g_1 \left(\frac{A}{i\mu_j^*}, v \right) \frac{e^{-ixA/i\mu_j^*}}{\sqrt{2\pi}} = \\
& = \left(-\frac{1}{i\mu_j^*} \right) g_1 \left(\frac{A}{i\mu_j^*}, v \right) g_0(\mu_j^*) \frac{e^{-Ax/\mu_j^*}}{\sqrt{2\pi}} \Delta\mu_j.
\end{aligned}$$

Переходя к пределу, получаем формулу (2.33)

$$F^{-1} \left[g_1(\zeta, v) \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\mu) \delta(A - i\mu\zeta) d\mu \right] = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(A/i\mu, v) g_0(\mu)}{\mu} e^{-Ax/\mu} d\mu.$$

Проверим сходимость получившегося интеграла.

$$\left| g_1 \left(\frac{A}{i\mu}, v \right) \frac{g_0(\mu)}{\mu} e^{-Ax/\mu} \right| = \left| \frac{h(A/i\mu, v) g_0(\mu) e^{-Ax/\mu}}{A(\mu - v)} \right| = \left| \frac{h(A/i\mu, v)}{A(\mu - v)} \right| \cdot \left| g_0(\mu) e^{-Ax/\mu} \right|.$$

Учитывая свойства функции $g_0(\mu)$, можно утверждать, что второй множитель ограничен при стремлении μ к нулю, и что произведение $g_0(\mu) e^{-Ax/\mu}$ при $\mu \rightarrow \infty$ стремится к нулю быстрее любой отрицательной степени μ . Первый множитель содержит гильдерову функцию $h(\zeta, v)$ и особенность в знаменателе. Учитывая вышесказанное, можно утверждать, что интеграл сходится, если его понимать в смысле главного значения по Коши. Таким образом, обратным преобразованием Фурье от функционала $\mathfrak{J}(\zeta, v)$ будет являться линейный непрерывный функционал, вычисляемый по формуле (2.33).

Теорема доказана.

§3. Общее решение системы интегро–дифференциальных уравнений

3.1. Краевая задача для $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$ и переход к обобщенным функциям.

3.1.1. Постановка задачи для $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$. В § 3 и § 4 главы 1 было показано, что исследование возмущения плазмы электрическим полем сводится к решению следующей системы интегро–дифференциальных уравнений для функций $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$:

$$\begin{cases} v\mathcal{F}_x(x, v) + A\mathcal{F}(x, v) = v\mathcal{E}(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x, s)k(s)ds, \\ \mathcal{E}_x(x) = B \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x, s)k(s)ds. \end{cases} \quad (3.1)$$

$$(3.2)$$

Напомним, что $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$ имеют физический смысл соответственно возмущения плотности распределения электронов и амплитуды самосогласованного поля. Система (3.1), (3.2) рассматривается в полосе

$$\Pi = \{(x, v) : x \in (-l, l), v \in (-\infty, +\infty)\}. \quad (3.3)$$

Краевые условия для функций $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$ на границе полосы были приняты следующие:

$$\mathcal{F}(l, v) = \mathcal{F}(l, -v), \quad \mathcal{F}(-l, v) = \mathcal{F}(-l, -v), \quad v \in (-\infty, +\infty), \quad (3.4)$$

$$\mathcal{E}(l) = 1, \quad \mathcal{E}(-l) = 1. \quad (3.5)$$

Напомним, что в уравнениях фигурируют комплексная и вещественная постоянные A и B , которые играют роль параметров задачи. Их связь с исходными физическими параметрами дается формулами (3.16), (4.16) из главы 1. Функция $k(s)$ имеет смысл функции распределения электронов в невозмущенном состоянии. Заметим, что функция $k(s)$ принадлежит классу $\mathfrak{K}$ (см. определение 2).

Далее будем предполагать, что функция $\mathcal{F}(x, v)$ непрерывна в замыкании полосы (3.3) за исключением бесконечно удаленных точек и ее производная $\partial\mathcal{F}/\partial x$

непрерывна в самой полосе соответственно, а, кроме того, конечен интеграл, фигурирующий в (3.1), (3.2), т.е.

$$\mathcal{F} \in C(\overline{\Pi} \setminus \{v = \pm\infty\}), \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \in C(\Pi), \quad (3.6)$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x, s) k(s) ds \right| < +\infty, \quad x \in (-l, l). \quad (3.7)$$

Функция $\mathcal{E}(x)$ предполагается непрерывной на отрезке $[-l, l]$, а ее производная — на интервале $(-l, l)$, т.е.

$$\mathcal{E} \in C[-l, l], \quad \frac{d\mathcal{E}}{dx} \in C(-l, l). \quad (3.8)$$

Далее на постановку (3.1)–(3.8) будем ссылаться как на основную задачу, рассматриваемую в диссертации. Такая постановка отличается от (0.1)–(0.5) уточнением классов, в которых рассматриваются искомые функции.

3.1.2 Переход к пространству обобщенных функций. Решение системы уравнений (3.1), (3.2) будем искать методом преобразования Фурье. Согласно [134, с. 131] существует взаимнооднозначное соответствие между элементами пространства D' и элементами пространства Z' , где, напомним, Z' — это пространство обобщенных функций, являющихся линейными непрерывными функционалами над элементами пространства Z , состоящего из образов Фурье основных функций из пространства D .

Функции $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$ и их производные по x , фигурирующие в уравнениях (3.1), (3.2), будем отождествлять с регулярными функционалами из пространства D' , т.е. функционалами, действующими на элементы пространства D согласно формуле (2.1). При этом функционал $\mathcal{F}(x, v)$ зависит от v как от параметра, а фигурирующий в (3.1), (3.2) интеграл $\int \mathcal{F}(x, s) k(s) ds$, являющийся интегралом по параметру, также является элементом пространства D' .

В пункте 3.2 в результате применения преобразования Фурье к уравнениям (3.1), (3.2) получена система двух интегральных уравнений для функций из пространства Z' , решение которой найдено в 3.2.4. Затем с помощью обратного

преобразования Фурье в пункте 3.4 найдены функции (регулярные функционалы) из пространства D' , являющиеся решением системы (3.1), (3.2).

3.2. Решение задачи для образов Фурье $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v)$, $\widehat{\mathcal{E}}(\zeta)$.

3.2.1. Переход к образам Фурье. Напомним, что прямое и обратное преобразование Фурье для регулярных функций $f(x)$ определяется формулами:

$$F[f(x)] = \widehat{f}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\zeta x} dx, \quad (3.9)$$

$$F^{-1}[\widehat{f}(\zeta)] = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\zeta) e^{-i\zeta x} d\zeta. \quad (3.10)$$

Преобразование Фурье $F[f]$ сингулярных обобщенных функций из D' определяется по формуле (2.9) (см. § 2 настоящей главы):

$$(\overline{F[f]}, F[\varphi]) = (\overline{f}, \varphi),$$

где φ и $F[\varphi]$ соответственно функция из пространства D и ее образ Фурье из пространства Z .

Образы Фурье функций $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$ обозначим соответственно $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v)$ и $\widehat{\mathcal{E}}(\zeta)$. Согласно свойствам преобразования Фурье для образов производных верны соотношения

$$F[\mathcal{F}_x(x, v)] = (-i\zeta)F[\mathcal{F}(x, v)] = -i\zeta\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v), \quad (3.11)$$

$$F[\mathcal{E}'(x)] = (-i\zeta)F[\mathcal{E}(x)] = -i\zeta\widehat{\mathcal{E}}(\zeta). \quad (3.12)$$

Интеграл по параметру s от функционала $\mathcal{F}(x, s) \in D'$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x, s) k(s) ds$$

также является функционалом из D' , а его образ Фурье, вычисляемый по формуле

$$F \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x, s) k(s) ds \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\mathcal{F}}(\zeta, s) k(s) ds, \quad (3.13)$$

(см. утверждение 2.4 из § 2 настоящей главы) является функционалом из пространства Z' .

Применяя преобразование Фурье к системе уравнений (3.1), (3.2) и используя равенства (3.11)–(3.13), получаем следующую систему уравнений относительно $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v)$ и $\widehat{\mathcal{E}}(\zeta)$:

$$\begin{cases} (A - i\zeta v)\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v) = \left(v - \frac{i\zeta}{B}\right)\widehat{\mathcal{E}}(\zeta), \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} \left(-\frac{i\zeta}{B}\right)\widehat{\mathcal{E}}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\mathcal{F}}(\zeta, s)k(s)ds, \end{cases} \quad (3.15)$$

решение которой будем искать в пространстве Z' .

3.2.2 Решение системы интегральных уравнений (3.14), (3.15) в Z' . Обозначим фигурирующий в уравнении (3.15) интеграл по параметру s от $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, s) \in Z'$ через

$$\widehat{\mathcal{W}}(\zeta) := \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\mathcal{F}}(\zeta, s)k(s)ds \in Z' \quad (3.16)$$

и перепишем систему (3.14), (3.15) в виде:

$$\begin{cases} (A - i\zeta v)\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v) = \left(v - \frac{i\zeta}{B}\right)\widehat{\mathcal{E}}(\zeta), \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} \left(-\frac{i\zeta}{B}\right)\widehat{\mathcal{E}}(\zeta) = \widehat{\mathcal{W}}(\zeta). \end{cases} \quad (3.18)$$

Используя утверждение 2.2 (см. п. 2.1.5 из § 2), выражая $\widehat{\mathcal{E}}(\zeta)$ из уравнения (3.18) и подставляя в (3.17), преобразуем систему (3.17), (3.18) к виду:

$$\begin{cases} (A - i\zeta v)\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v) = \left(v - \frac{i\zeta}{B}\right)\left(-\frac{B}{i\zeta}\right)\widehat{\mathcal{W}}(\zeta) + \left(v - \frac{i\zeta}{B}\right)Q_0\delta(\zeta), \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\begin{cases} \widehat{\mathcal{E}}(\zeta) = -\frac{B}{i\zeta}\widehat{\mathcal{W}}(\zeta) + Q_0\delta(\zeta), \end{cases} \quad (3.20)$$

где Q_0 – произвольная постоянная. Из уравнения (3.19) выражаем $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v)$ по формуле:

$$\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v) = \frac{v - i\zeta/B}{A - i\zeta v} \left(-\frac{B}{i\zeta}\right)\widehat{\mathcal{W}}(\zeta) + \frac{v - i\zeta/B}{A - i\zeta v}Q_0\delta(\zeta) + Q(v)\delta(A - i\zeta v), \quad (3.21)$$

где Q_0 является свободной константой, а $Q(v)$ – произвольная функция, свойства которой будут уточнены далее. Напомним, что $\widehat{\mathcal{W}}(\zeta)$ выражается через искомую функцию $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v)$ по формуле (3.16).

Таким образом, исходная задача относительно образов Фурье $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v)$ и $\widehat{\mathcal{E}}(\zeta)$ сведена к интегральному уравнению (3.21) относительно $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v)$ как функции v , а комплексное переменное ζ играет роль параметра. После решения уравнения (3.21) найдем $\widehat{\mathcal{E}}(\zeta)$ по формуле (3.20).

3.2.3 Решение уравнения (3.21). Представим искомую функцию $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta)$ из уравнения (3.21) в виде

$$\widehat{\mathcal{F}}(\zeta) = \widehat{\mathcal{F}}_{\text{hom}}(\zeta) + \widehat{\mathcal{F}}_1(\zeta) + \widehat{\mathcal{F}}_2(\zeta),$$

где слагаемые $\widehat{\mathcal{F}}_{\text{hom}}(\zeta, v), \widehat{\mathcal{F}}_1(\zeta, v), \widehat{\mathcal{F}}_2(\zeta, v)$ являются решениями следующих интегральных уравнений соответственно:

$$\widehat{\mathcal{F}}_{\text{hom}}(\zeta, v) = \frac{v - i\zeta/B}{A - i\zeta v} \left(-\frac{B}{i\zeta} \right) \widehat{\mathcal{W}}_{\text{hom}}(\zeta), \quad (3.22)$$

$$\widehat{\mathcal{F}}_1(\zeta, v) = \frac{v - i\zeta/B}{A - i\zeta v} \left(-\frac{B}{i\zeta} \right) \widehat{\mathcal{W}}_1(\zeta) + \frac{v - i\zeta/B}{A - i\zeta v} Q_0 \delta(\zeta), \quad (3.23)$$

$$\widehat{\mathcal{F}}_2(\zeta, v) = \frac{v - i\zeta/B}{A - i\zeta v} \left(-\frac{B}{i\zeta} \right) \widehat{\mathcal{W}}_2(\zeta) + Q(v) \delta(A - i\zeta v); \quad (3.24)$$

здесь введены обозначения:

$$\widehat{\mathcal{W}}_{\text{hom}}(\zeta) := \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\mathcal{F}}_{\text{hom}}(\zeta, s) k(s) ds, \quad (3.25)$$

$$\widehat{\mathcal{W}}_1(\zeta) := \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\mathcal{F}}_1(\zeta, s) k(s) ds, \quad \widehat{\mathcal{W}}_2(\zeta) := \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\mathcal{F}}_2(\zeta, s) k(s) ds. \quad (3.26)$$

Нетрудно увидеть, что функционал $\widehat{\mathcal{W}}(\zeta)$ будет являться суммой соответствующих функционалов (3.25), (3.26):

$$\widehat{\mathcal{W}}(\zeta) = \widehat{\mathcal{W}}_{\text{hom}}(\zeta) + \widehat{\mathcal{W}}_1(\zeta) + \widehat{\mathcal{W}}_2(\zeta).$$

3.2.4 Решение уравнения (3.22). Сначала решим уравнение (3.22), для чего умножим обе части уравнения на функцию $k(v)$, и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$, учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\mathcal{W}}(\zeta) k(v) dv = \widehat{\mathcal{W}}(\zeta).$$

В результате получаем:

$$\widehat{\mathcal{W}}_{\text{hom}}(\zeta) = \widehat{\mathcal{W}}_{\text{hom}}(\zeta) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v - i\zeta/B}{A - i\zeta v} \left(-\frac{B}{i\zeta} \right) k(v) dv.$$

Для функционала $\widehat{\mathcal{W}}_{\text{hom}}(\zeta)$ получаем уравнение (переменную интегрирования заменим на традиционную s):

$$\left(1 + \frac{B}{i\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s - i\zeta/B}{A - i\zeta s} k(s) ds\right) \widehat{\mathcal{W}}_{\text{hom}}(\zeta) = 0. \quad (3.27)$$

Выражение в скобках назовем функцией $\Delta(\zeta)$:

$$\Delta(\zeta) = 1 + \frac{B}{i\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s - i\zeta/B}{A - i\zeta s} k(s) ds. \quad (3.28)$$

Заметим, что функция $\Delta(\zeta)$ является аналитической функцией на всей комплексной плоскости, кроме прямой $\zeta = A/is$. Решение уравнения для $\widehat{\mathcal{W}}_{\text{hom}}(\zeta)$ зависит от наличия и кратности нулей ζ_k функции $\Delta(\zeta)$. Предположим, что $\Delta(\zeta)$ имеет нули ζ_k , $k = \overline{1, m}$, кратности которых обозначим черех n_k , и образуем сумму

$$\widehat{\mathcal{N}}(\zeta) = \sum_{k=1}^m \sum_{r=0}^{n_k-1} Q_{kr} \delta^{(r)}(\zeta - \zeta_k), \quad (3.29)$$

где Q_{kr} — произвольные комплексные постоянные. Тогда решением уравнения (3.22) является

$$\widehat{\mathcal{W}}_{\text{hom}}(\zeta) = \widehat{\mathcal{N}}(\zeta). \quad (3.30)$$

3.2.5. Решение уравнения (3.23). Умножая обе части равенства (3.23) на $k(v)$ и интегрируя по v от $-\infty$ до $+\infty$, получаем:

$$\widehat{\mathcal{W}}_1(\zeta) = \widehat{\mathcal{W}}_1(\zeta) \left(-\frac{B}{i\zeta}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v - i\zeta/B}{A - i\zeta v} k(v) dv + Q_0 \delta(\zeta) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v - i\zeta/B}{A - i\zeta v} k(v) dv. \quad (3.31)$$

Группируя в (3.31) слагаемые, содержащие $\widehat{\mathcal{W}}_1(\zeta)$, приходим к следующему уравнению относительно этого функционала (переменную интегрирования заменим на привычную s):

$$\Delta(\zeta) \widehat{\mathcal{W}}_1(\zeta) = Q_0 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s - i\zeta/B}{A - i\zeta s} k(s) ds \right) \delta(\zeta), \quad (3.32)$$

где $\Delta(\zeta)$ определяется формулой (3.28). Частное решение уравнения (3.32) имеет вид:

$$\widehat{\mathcal{W}}_1(\zeta) = \frac{Q_0}{\Delta(\zeta)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s - i\zeta/B}{A - i\zeta s} k(s) ds \right) \delta(\zeta), \quad (3.33)$$

при условии, что $\Delta(0) \neq 0$. Общее решение уравнения (3.32) отличается от (3.33) на функционал (3.29), т.е. имеет вид

$$\sum_{k=1}^m \sum_{r=0}^{n_k-1} Q_{kr} \delta^{(r)}(\zeta - \zeta_k) + \frac{Q_0 \delta(\zeta)}{\Delta(\zeta)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s - i\zeta/B}{A - i\zeta s} k(s) ds,$$

где ζ_k — нули функции $\Delta(\zeta)$ кратности n_k , а Q_{kr} — произвольные постоянные.

3.2.6. Решение уравнения (3.24). Уравнение (3.24) будем рассматривать при

$$\zeta = A/iv, \quad v \in \mathbb{R}. \quad (3.34)$$

Умножая обе его части на $k(v)$ и интегрируя по $v \in (-\infty, +\infty)$, где интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s - i\zeta/B}{A - i\zeta s} k(s) ds \quad (3.35)$$

понимается в смысле главного значения, приходим к уравнению относительно $\widehat{\mathcal{W}}_2(\zeta)$ (переменную интегрирования заменим на привычную s):

$$\left(1 + \frac{B}{i\zeta} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s - i\zeta/B}{A - i\zeta s} k(s) ds \right) \widehat{\mathcal{W}}_2(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(s) k(s) \delta(A - i\zeta s) ds. \quad (3.36)$$

Отметим, что согласно (3.34) в (3.35) и в (3.36) переменная ζ лежит на линии интегрирования. Введем обозначение для функции, фигурирующей в левой части уравнения (3.36):

$$\Delta_0(\zeta) = 1 + \frac{B}{i\zeta} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s - i\zeta/B}{A - i\zeta s} k(s) ds. \quad (3.37)$$

Заметим, что функционал в правой части уравнения (3.36) действует следующим образом:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} Q(s) k(s) \delta(A - i\zeta s) ds, \psi(\zeta) \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(s) k(s)}{-is} \psi \left(\frac{A}{is} \right) ds,$$

т.е. носителем обобщенной функции является прямая (3.34) комплексной плоскости $\zeta = A/is$, $s \in \mathbb{R}$.

Решением уравнения (3.24) будет функционал

$$\widehat{W}_2(\zeta) = \frac{1}{\Delta_0(\zeta)} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(s)k(s)\delta(A - i\zeta s)ds. \quad (3.38)$$

3.2.7. Представление для образов Фурье $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v)$ и $\widehat{\mathcal{E}}(\zeta)$. Учитывая выражения (3.30), (3.32), (3.38), получаем представления для искомых функционалов $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v)$, $\widehat{\mathcal{E}}(\zeta)$:

$$\left\{ \begin{aligned} \widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v) &= \frac{Q_0(v - i\zeta/B)}{\Delta(\zeta)(A - i\zeta v)}\delta(\zeta) - \frac{B(v - i\zeta/B)}{i\zeta(A - i\zeta v)}\widehat{\mathcal{N}}(\zeta) + Q(v)\delta(A - i\zeta v) - \\ &\quad - \frac{1}{\Delta_0(\zeta)} \cdot \frac{B(v - i\zeta/B)}{i\zeta(A - i\zeta v)} \int_{-\infty}^{\infty} Q(s)k(s)\delta(A - i\zeta s)ds, \\ \widehat{\mathcal{E}}(\zeta) &= \frac{Q_0}{\Delta(\zeta)}\delta(\zeta) - \frac{B}{i\zeta}\widehat{\mathcal{N}}(\zeta) - \frac{1}{\Delta_0(\zeta)} \cdot \frac{B}{i\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} Q(s)k(s)\delta(A - i\zeta s)ds, \end{aligned} \right. \quad (3.39)$$

где функции $\Delta(\zeta)$, $\Delta_0(\zeta)$ даются равенствами (3.28), (3.37), $\widehat{\mathcal{N}}(\zeta)$ – функционал, определенный по формуле (3.29), Q_0 , Q_{ks} – свободные константы, $Q(v)$ – произвольная функция, для которой сходится интеграл

$$\widehat{\mathcal{J}}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(s)k(s)\delta(A - i\zeta s)ds, \quad (3.41)$$

фигурирующий в выражениях (3.39), (3.40).

Введем обозначение

$$V(\zeta, v) := \frac{v - i\zeta/B}{A - i\zeta v}. \quad (3.42)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Решение системы (3.14), (3.15) в пространстве Z' имеет вид*

$$\left\{ \widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v) = \left(\frac{Q_0}{\Delta(\zeta)}\delta(\zeta) - \frac{B}{i\zeta}\widehat{\mathcal{N}}(\zeta) - \frac{B}{i\zeta\Delta_0(\zeta)}\widehat{\mathcal{J}}(\zeta) \right) V(\zeta, v) + Q(v)\delta(A - i\zeta v), \right. \quad (3.43)$$

$$\left. \widehat{\mathcal{E}}(\zeta) = \frac{Q_0}{\Delta(\zeta)}\delta(\zeta) - \frac{B}{i\zeta}\widehat{\mathcal{N}}(\zeta) - \frac{B}{i\zeta\Delta_0(\zeta)}\widehat{\mathcal{J}}(\zeta), \right. \quad (3.44)$$

где $\Delta(\zeta)$, $\Delta_0(\zeta)$, $V(\zeta, v)$ и $\widehat{\mathcal{J}}(\zeta)$ определены соответственно равенствами (3.28), (3.37), (3.42) и (3.41), функционал $\widehat{\mathcal{N}}(\zeta)$ определен формулой (3.29), в которой ζ_k — нули порядка n_k функции $\Delta(\zeta)$ (такие, что $\zeta_k \neq 0$ и $\zeta_k \neq A/iv$), Q_0, Q_{kr} — свободные константы, $Q(v)$ — произвольная функция, такая, что произведение функций $Q(v)k(v) \in \mathfrak{G}_0$ и выражение $Q(v)/(-iv)$ принимает конечное значение при всех допустимых значениях параметра v .

Замечание 2.5. Справедливо следующее соотношение:

$$\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v) = V(\zeta, v)\widehat{\mathcal{E}}(\zeta) + Q(v)\delta(A - i\zeta v). \quad (3.45)$$

Замечание 2.6. В случае отсутствия у функции $\Delta(\zeta)$ нулей решение системы (3.14), (3.15) в пространстве Z' имеет вид

$$\left\{ \widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v) = \left(\frac{Q_0}{\Delta(\zeta)}\delta(\zeta) - \frac{B}{i\zeta\Delta_0(\zeta)}\widehat{\mathcal{J}}(\zeta) \right) V(\zeta, v) + Q(v)\delta(A - i\zeta v), \quad (3.46) \right.$$

$$\left. \widehat{\mathcal{E}}(\zeta) = \frac{Q_0}{\Delta(\zeta)}\delta(\zeta) - \frac{B}{i\zeta\Delta_0(\zeta)}\widehat{\mathcal{J}}(\zeta), \quad (3.47) \right.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.4. Вывод представлений (3.43), (3.44) для функций $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v)$ и $\widehat{\mathcal{E}}(\zeta)$ был осуществлен перед теоремой. Необходимо теперь продемонстрировать, что получившиеся выражения принадлежат пространству Z' . Воспользуемся сведениями из пункта 2.3.2. Для того, чтобы произведение некоторой функции $f(\zeta)$ на дельта-функцию $\delta(\zeta - \zeta_0)$ принадлежало пространству Z' , достаточно, чтобы функция $f(\zeta_0)$ принимала конечное значение. Функции

$$\frac{1}{\Delta(\zeta)}, \quad \frac{V(\zeta, v)}{\Delta(\zeta)},$$

являющиеся множителями в (3.43), (3.44), удовлетворяют этому условию в точке $\zeta_0 = 0$. Функции

$$\frac{B}{i\zeta}, \quad \frac{BV(\zeta, v)}{i\zeta}$$

удовлетворяют этому условию в точках $\zeta = \zeta_k$, которые являются нулями дисперсионной функции $\Delta(\zeta)$, если $\zeta_k \neq 0$ и $\zeta_k \neq A/iv$.

Для того, чтобы выражение $Q(v)\delta(A - i\zeta v)$ являлось функцией из пространства Z' , необходимо, чтобы функция $Q(v)$, зависящая от параметра v , была определена в точке v и выражение $Q(v)/(-iv)$ принимало конечное значение при всех допустимых значениях параметра v , что тоже требуется по условию. Рассмотрим слагаемые, содержащие интеграл (3.41) по параметру от обобщенной функции. Согласно теореме 2.2, от произведения функций $Q(v)k(v)$ достаточно потребовать, чтобы оно принадлежало классу $\mathfrak{G}_0$, что выполняется по условию теоремы. Функции

$$-\frac{B}{i\zeta\Delta_0(\zeta)}, \quad \frac{BV(\zeta, v)}{i\zeta\Delta_0(\zeta)}$$

принадлежат классу $\mathfrak{G}_1$ в силу свойств функций $\Delta_0(\zeta)$ и $V(\zeta, v)$. Сделанные предположения позволяют применить теорему 2.2 и получить требуемые представления (3.43), (3.44).

Теорема доказана.

3.3. Нахождение обратного преобразования Фурье для $\widehat{\mathcal{F}}(\zeta, v)$, $\widehat{\mathcal{E}}(\zeta)$.

Обратное преобразование Фурье от выражений (3.43), (3.44) будем искать с помощью результатов из § 2 настоящей главы.

Введем функцию $\Omega(\lambda) := \Delta(\zeta(\lambda))$, получаемую из дисперсионной функции $\Delta(\zeta)$, определенной по формуле (3.28), с помощью замены переменного $\zeta = A/(i\lambda)$:

$$\Omega(\lambda) = 1 - \frac{B}{A^2}\lambda^2 - \frac{B}{A^2}\lambda \left(\lambda^2 - \frac{A}{B} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k(s)}{s - \lambda} ds. \quad (3.48)$$

Как показано в п. 3.1 § 3, пределы $\Omega^\pm(\lambda)$, $\lambda \rightarrow \infty$, совпадают и принимают конечное значение, которое будем обозначать Ω_∞ . Отметим, что $\Omega_\infty \neq 0$ в силу сделанного предположения $\Delta(0) \neq 0$.

Введем также функцию $\Omega_0(\lambda) = \Delta_0(\zeta(\lambda))$ по формуле:

$$\Omega_0(\lambda) = 1 - \frac{B}{A^2}\lambda^2 - \frac{B}{A^2}\lambda \left(\lambda^2 - \frac{A}{B} \right) \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k(s)}{s - \lambda} ds. \quad (3.49)$$

С учетом формул (2.15), (2.21) и (2.24) из утверждения 2.5 первые слагаемые в выражениях (3.43), (3.44) после применения обратного преобразования Фурье

будут иметь вид:

$$F^{-1} \left[\frac{Q_0}{\Delta(\zeta)} \delta(\zeta) \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{Q_0}{\Delta(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{Q_0}{\Omega_\infty}, \quad (3.50)$$

$$F^{-1} \left[\frac{Q_0(v - i\zeta/B)}{\Delta(\zeta)(A - i\zeta v)} \delta(\zeta) \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{Q_0 v}{A\Delta(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{Q_0 v}{A\Omega_\infty}. \quad (3.51)$$

Функцию $V(\zeta, v)$ в новых переменных можно записать следующим образом:

$$V(\zeta, v) = \frac{v - i\zeta/B}{A - i\zeta v} = \frac{v\lambda - A/B}{A(\lambda - v)} = \frac{1}{A} \left(\frac{\lambda^2 - A/B}{\lambda - v} - \lambda \right) = \varkappa(\lambda, v). \quad (3.52)$$

Корню ζ_k функции $\Delta(\zeta)$ соответствует корень λ_k функции $\Omega(\lambda)$ той же кратности. Выражения, содержащие ζ_k , перепишутся следующим образом:

$$\frac{B}{i\zeta_k} = \frac{Bi\lambda_k}{iA} = \frac{B\lambda_k}{A},$$

$$e^{-i\zeta_k x} = e^{-iAx/i\lambda_k} = e^{-Ax/\lambda_k},$$

$$V(\zeta_k, v) = \frac{v - i\zeta_k/B}{A - i\zeta_k v} = \frac{v\lambda_k - A/B}{A(\lambda_k - v)} = \frac{1}{A} \left(\frac{\lambda_k^2 - A/B}{\lambda_k - v} - \lambda_k \right) = \varkappa(\lambda_k, v).$$

Заметим, что требование теоремы 2.4 относительно корней функции $\zeta_k \neq 0$ и $\zeta_k \neq A/iv$ равнозначно требованию $\lambda_k \notin \mathbb{R}$.

Обратное преобразование Фурье от функционала $\widehat{\mathcal{N}}(\zeta)$ можно найти с помощью формулы (2.22). Учитывая, что $\zeta_k = A/i\lambda_k$, получаем

$$\begin{aligned} F^{-1} [\widehat{\mathcal{N}}(\zeta)] &= F^{-1} \left[\sum_{k=1}^m \sum_{r=0}^{n_k-1} Q_{kr} \delta^{(r)}(\zeta - \zeta_k) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{k=1}^m \sum_{r=0}^{n_k-1} Q_{kr} (ix)^r e^{-i\zeta_k x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{k=1}^m \sum_{r=0}^{n_k-1} Q_{kr} (ix)^r e^{-Ax/\lambda_k}. \end{aligned}$$

Обозначим выражение, записанное с помощью двойной суммы, как $\mathcal{N}(x)$:

$$\mathcal{N}(x) = \sum_{k=1}^m \sum_{r=0}^{n_k-1} Q_{kr} (ix)^r e^{-Ax/\lambda_k}.$$

Тогда обратное преобразование Фурье от функционала $\widehat{\mathcal{N}}(\zeta)$ вычисляется по формуле

$$F^{-1} [\widehat{\mathcal{N}}(\zeta)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{N}(x). \quad (3.53)$$

Вычислим обратное преобразование Фурье от слагаемых, содержащих функционал $\widehat{\mathcal{N}}(\zeta)$ в качестве множителя:

$$\begin{aligned}
F^{-1} \left[\left(-\frac{B}{i\zeta} \right) \widehat{\mathcal{N}}(\zeta) \right] &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{k=1}^m \sum_{r=0}^{n_k-1} Q_{kr} \left(\frac{B\lambda_k}{A} \right) (ix)^r e^{-Ax/\lambda_k} = \\
&= -\frac{B}{A\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{k=1}^m \sum_{r=0}^{n_k-1} Q_{kr} \lambda_k (ix)^r e^{-Ax/\lambda_k}, \\
F^{-1} \left[\left(-\frac{B}{i\zeta} \right) V(\zeta, v) \widehat{\mathcal{N}}(\zeta) \right] &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{k=1}^m \sum_{r=0}^{n_k-1} Q_{kr} \left(\frac{B\lambda_k}{A} \right) V(\zeta_k, v) (ix)^r e^{-Ax/\lambda_k} = \\
&= -\frac{B}{A\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{k=1}^m \sum_{r=0}^{n_k-1} Q_{kr} \lambda_k \varkappa(\lambda_k, v) (ix)^r e^{-Ax/\lambda_k}.
\end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(x) = -\frac{B}{A} \cdot \sum_{k=1}^m \sum_{r=0}^{n_k-1} Q_{kr} \lambda_k (ix)^r e^{-Ax/\lambda_k}, \quad (3.54)$$

$$\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(x, v) = -\frac{B}{A} \cdot \sum_{k=1}^m \sum_{r=0}^{n_k-1} Q_{kr} \lambda_k \varkappa(\lambda_k, v) (ix)^r e^{-Ax/\lambda_k}. \quad (3.55)$$

С помощью данных обозначений запишем формулы для обратного преобразования Фурье для слагаемых, содержащих функционал $\widehat{\mathcal{N}}(\zeta)$ в качестве множителя:

$$F^{-1} \left[\left(-\frac{B}{i\zeta} \right) \widehat{\mathcal{N}}(\zeta) \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(x), \quad (3.56)$$

$$F^{-1} \left[\left(-\frac{B}{i\zeta} \right) V(\zeta, v) \widehat{\mathcal{N}}(\zeta) \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{N}_{\mathcal{F}}(x). \quad (3.57)$$

Обратное преобразование Фурье от выражения $Q(v)\delta(A - i\zeta v)$ вычислим по формуле (2.25) из утверждения 2.6 (см. п. 2.3.2):

$$F^{-1} [Q(v)\delta(A - i\zeta v)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(-\frac{Q(v)}{iv} \right) e^{-Ax/v}. \quad (3.58)$$

Для вычисления обратного преобразования Фурье от слагаемых, содержащих интеграл $\widehat{\mathcal{J}}(\zeta)$ в качестве множителя, воспользуемся формулой (2.33) из теоремы 2.3. Заметим, что функции

$$\frac{1}{\Delta_0(\zeta)} \left(-\frac{B}{i\zeta} \right), \quad \frac{1}{\Delta_0(\zeta)} \left(-\frac{B}{i\zeta} \right) V(\zeta, v)$$

должны принадлежать классу $\mathfrak{G}_1$, а произведение функций $Q(s)k(s)$ должно принадлежать классу $\mathfrak{G}_0$. Напомним, что $\Delta_0(A/is) = \Omega_0(s)$, а $V(A/is, v) = \varkappa(s, v)$ согласно формулам (3.49), (3.52).

$$\begin{aligned}
F^{-1} \left[\frac{1}{\Delta_0(\zeta)} \left(-\frac{B}{i\zeta} \right) \int_{-\infty}^{\infty} Q(s) \delta(A - i\zeta s) k(s) ds \right] &= \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{Bis}{iA} \right) \frac{Q(s)k(s)}{\Delta_0(A/is)(-is)} e^{-Ax/s} ds = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B}{iA} \cdot \frac{Q(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} e^{-Ax/\lambda} d\lambda, \tag{3.59}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^{-1} \left[-\frac{1}{\Delta_0(\zeta)} \cdot \frac{BV(\zeta, v)}{i\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} Q(s) \delta(A - i\zeta s) k(s) ds \right] &= \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta_0(A/is)} \frac{(-B)V(A/is, v)}{(iA/is)(-is)} Q(s)k(s) e^{-Ax/s} ds = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B}{iA} \cdot \frac{Q(\lambda)k(\lambda)V(A/i\lambda, v)}{\Omega_0(\lambda)} e^{-Ax/\lambda} d\lambda = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B}{iA} \cdot \frac{Q(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \varkappa(\lambda, v) e^{-Ax/\lambda} d\lambda. \tag{3.60}
\end{aligned}$$

3.4. Представление решения системы интегро-дифференциальных уравнений.

Используя полученные формулы (3.50)–(3.60), получим представления для искомых функций $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$. Для упрощения записи найденных представлений все произвольные коэффициенты Q_0 и Q_{kr} и функцию $Q(v)$ заменим на коэффициенты $\tilde{Q}_0$ и $\tilde{Q}_{kr}$ и функцию $\tilde{Q}(v)$ по формулам

$$\sqrt{2\pi}\tilde{Q}_0 = Q_0, \quad \sqrt{2\pi}\tilde{Q}_{kr} = Q_{kr}, \quad \sqrt{2\pi}\tilde{Q}(v) = Q(v),$$

а затем опустим знак $\sim$.

Заметим, что обратное преобразование Фурье переводит функции из пространства Z' в функции из пространства D' .

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.5. *Решение системы (3.1), (3.2) в плоскости $\mathbb{R}^2$ имеет вид:*

$$\begin{cases} \mathcal{F}(x, v) = \frac{Q_0 v}{A \Omega_\infty} + \mathcal{N}_{\mathcal{F}}(x, v) + \frac{B}{iA} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \varkappa(\lambda, v) e^{-Ax/\lambda} d\lambda - \\ - \frac{Q(v)}{iv} e^{-Ax/v}, \\ \mathcal{E}(x) = \frac{Q_0}{\Omega_\infty} + \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(x) + \frac{B}{iA} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} e^{-Ax/\lambda} d\lambda, \end{cases} \quad (3.61)$$

где функции $\Omega_0(\lambda)$ и $\varkappa(\lambda, v)$ определены соответственно формулами (3.49) и (3.52), функции $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(x, v)$ и $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(x)$ даются равенствами (3.55) и (3.54), в которых λ_k — нули функции $\Omega(\lambda)$ порядка n_k , причем $\lambda_k \notin \mathbb{R}$, Q_0, Q_{kr} — свободные константы, $Q(v)$ — произвольная функция, такая, что произведение функций $Q(v)k(v) \in \mathfrak{G}_0$, а выражение $Q(v)/(-iv)$ принимает конечное значение при всех допустимых значениях параметра v ; интеграл в формуле (3.61) понимается в смысле главного значения по Коши.

Замечание 2.7. Если функция $\Omega(\lambda)$ не обращается в нуль, то решение системы (3.1), (3.2) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \mathcal{F}(x, v) = \frac{Q_0 v}{A \Omega_\infty} + \frac{B}{iA} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \varkappa(\lambda, v) e^{-Ax/\lambda} d\lambda - \frac{Q(v)}{iv} e^{-Ax/v}, \\ \mathcal{E}(x) = \frac{Q_0}{\Omega_\infty} + \frac{B}{iA} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} e^{-Ax/\lambda} d\lambda, \end{cases} \quad (3.63)$$

где функции $\Omega_0(\lambda)$ и $\varkappa(\lambda, v)$ определены соответственно формулами (3.49) и (3.52), Q_0 — свободная константа, $Q(v)$ — произвольная функция, такая, что произведение функций $Q(v)k(v) \in \mathfrak{G}_0$, а выражение $Q(v)/(-iv)$ принимает конечное значение при всех допустимых значениях параметра v ; интеграл в формуле (3.61) понимается в смысле главного значения по Коши.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемые утверждения вытекают из рассуждений, приведенных перед формулировкой настоящего предложения. Теорема доказана.

Глава 3. Решение краевой задачи для линеаризованной системы Больцмана — Максвелла

§1. Вводные замечания

В § 3 главы 2 было построено аналитическое представление для общего решения системы уравнений (3.1), (3.2), стр. 56, во всей плоскости $(x, v) \in \mathbb{R}^2$, т.е. без учета краевых условий на границе полосы, см. теорему 2.5 и замечание 2.7. Такое представление содержит конечный набор констант Q_j , а также некоторую свободную функцию $Q(v)$. При подстановке представлений (3.61), (3.62) или (3.63), (3.64) в краевые условия (3.4) на стр. 56 возникает сингулярное интегральное уравнение на вещественной прямой относительно функции $Q(v)$, в которое константы Q_j входят в качестве параметров. Такое уравнение в настоящей работе, следуя [39, 103], сведено к задаче Римана, решение которой найдено в аналитическом виде (см. § 4 настоящей главы) с помощью модификации представлений Ф.Д. Гахова и Н.И. Мухелишвили.

В § 2 данной главы приведены необходимые сведения из теории сингулярной задачи Римана линейного сопряжения.

В § 3 проведено исследование дисперсионной функции $\Omega(z)$, определенной по формуле (3.48), стр. 65, в зависимости от параметров задачи (3.1)–(3.8), стр. 56. Напомним, что согласно теореме 2.5 и замечанию 2.7 параграфа 3 главы 2, вид решения краевой задачи (3.1)–(3.8) зависит от существования (и положения) нулей этой функции.

В § 4 построено решение краевой задачи (3.1)–(3.8), стр. 56, для случая, когда дисперсионная функция не имеет нулей (см. п. 4.1) и когда дисперсионная функция имеет ровно два нуля, один из которых расположен в верхней полуплоскости, а второй — в нижней (см. п. 4.2). Результаты представлены в теоремах 3.9, 3.12. Рассмотренные случаи возникают, когда невозмущенная среда описывается функцией распределения Ферми — Дирака или Максвелла.

§2. Сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши и задача Римана

Материал данного параграфа заимствован из монографий Ф.Д. Гахова [39] и Н.И. Мусхелишвили [103]. Приведенные ниже сведения используются в § 4 при решении краевой задачи (3.1)–(3.8), формулировку которой см. на стр. 27, 56.

2.1. Сингулярные интегральные уравнения. Предположим, что L – достаточно гладкий жорданов спрямляемый контур или вещественная ось $\mathbb{R}$, $a(t)$, $b(t)$ и $\gamma(t)$ – заданные на L непрерывные по Гёльдеру функции, причем $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$ и $a(t) \pm b(t) \neq 0$, $t \in L$. Рассмотрим следующее уравнение относительно функции $\varphi(t)$:

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \text{v.p.} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \gamma(t); \quad (2.1)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Обзор исследований по теории таких уравнений можно найти в книгах [39, 103], а также в работах [41, 124].

Решение уравнения (2.1) может быть построено в замкнутом аналитическом виде путем его сведения к задаче Римана линейного сопряжения и решения последней с помощью методов Ф.Д. Гахова и Н.И. Мусхелишвили. Для перехода к задаче Римана, следуя [39, 103], запишем следующий интеграл типа Коши:

$$\Phi(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad (2.2)$$

и отметим, что $\Phi(z)$ является кусочно-аналитической функцией с линией разрыва L . Через $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ будем обозначать функции, которые совпадают с $\Phi(z)$ в области, расположенной слева и справа от контура L :

$$\Phi^+(z) := \Phi(z), \quad z \in D^+ \text{ (или } z \in \mathbb{H}^+, \text{ если } L = \mathbb{R}),$$

$$\Phi^-(z) := \Phi(z), \quad z \in D^- \text{ (или } z \in \mathbb{H}^-, \text{ если } L = \mathbb{R}).$$

Запишем формулы Сохоцкого, связывающие плотность $\varphi(t)$, предельные значения $\Phi^\pm(t)$ функций $\Phi^\pm(z)$ на контуре L , а также сингулярный интеграл с ядром

Коши:

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t), \quad t \in L, \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \Phi^+(t) + \Phi^-(t), \quad t \in L. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.3), (2.4) в уравнение (2.1), после преобразований приходим к условию задачи Римана линейного сопряжения функций $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ на контуре L :

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad (2.5)$$

где коэффициент $G(t)$ и правая часть $g(t)$ выражаются через данные уравнения (2.1) по формулам:

$$G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}, \quad g(t) = \frac{\gamma(t)}{a(t) + b(t)}. \quad (2.6)$$

При этом требуется дополнительно принять ограничение

$$\Phi^-(\infty) = 0. \quad (2.7)$$

Согласно принятым условиям на $a(t)$ и $b(t)$, коэффициент $G(t)$ и правая часть $g(t)$ являются гёльдеровыми функциями, причем

$$G(t) \neq 0, \quad t \in L. \quad (2.8)$$

Формулы для решения задачи Римана и искомой функции $\varphi(t)$ приведены далее.

2.2. Решение задачи Римана и связанного с ней интегрального уравнения.

Фундаментальное значение для решения задачи Римана играет индекс $\varkappa$ функции $G(t)$. Предположим далее, что L – жорданов, спрямляемый, достаточно гладкий контур. Индекс $\varkappa$ определяется как деленное на 2π приращение аргумента $G(t)$ при обходе кривой L в положительном направлении (так, что область D^+ остается слева):

$$\varkappa = \text{Ind } G(t) = \frac{1}{2\pi} [\arg G(t)]_L. \quad (2.9)$$

Каноническим решением однородной задачи Римана называют пару функций, определенных по формулам

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \quad X^-(z) = z^{-\varkappa} e^{\Gamma^-(z)}, \quad (2.10)$$

где

$$\Gamma^+(z) = \Gamma(z), z \in D^+, \quad \Gamma^-(z) = \Gamma(z), z \in D^-, \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau. \quad (2.11)$$

Эти функции удовлетворяют краевому условию

$$X^+(t) = G(t)X^-(t), \quad t \in L.$$

В монографиях [39, 103] доказано, что если $\varkappa \geq 0$, то решение задачи Римана (2.5) имеет вид

$$\Phi^\pm(z) = X^\pm(z)P_\varkappa(z) + \frac{X^\pm(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)d\tau}{X^\pm(\tau)(\tau - z)}, \quad (2.12)$$

где $X^\pm(z)$ – каноническое решение однородной задачи, $P_\varkappa(z)$ – полином степени $\varkappa$ с произвольными комплексными коэффициентами. Если же индекс $\varkappa < 0$, то для разрешимости задачи (2.5) необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\int_L \frac{g(\tau)\tau^k d\tau}{X^+(\tau)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, |\varkappa| - 1. \quad (2.13)$$

После построения предельных значений $\Phi^\pm(t), t \in L$, решение сингулярного интегрального уравнения (2.1) находится по формуле Сохоцкого (2.3). В случае, когда L – вещественная ось, общий путь, основанный на факторизации коэффициента $G(t) = X^+(t)/X^-(t)$ с помощью канонической функции, остается прежним, но для определения $X^\pm(z)$ требуется модификация представлений (2.10), (2.11). Здесь не приводятся соответствующие формулы, однако в § 4 построено решение такого уравнения вида (2.1) для случая $L = \mathbb{R}$, к которому сводится решение задачи (3.1)–(3.8), стр. 56, с помощью представлений, полученных в теореме 2.5 и замечании 2.7 параграфа 3 главы 2.

§3. Аналитическое и численное исследование дисперсионной функции $\Omega(z)$

3.1. Основные свойства дисперсионной функции $\Omega(z)$.

Напомним, что представление (3.61), (3.62) для общего решения $\mathcal{F}(x, v), \mathcal{E}(x)$ системы уравнений (3.1), (3.2) зависит от существования и положения комплексных нулей дисперсионной функции $\Omega(z)$, см. формулу (3.48), на стр. 65 § 3 гл. 2:

$$\Omega(z) = 1 - \frac{B}{A^2}z^2 - \frac{B}{A^2}z \left(z^2 - \frac{A}{B} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(s)}{s - z} ds, \quad z \in \mathbb{H}^\pm. \quad (3.14)$$

Поскольку (3.14) содержит интеграл типа Коши, взятый по вещественной оси, то функция $\Omega(z)$ является кусочно-аналитической с линией разрыва $(-\infty, +\infty)$. Будем обозначать

$$\Omega^\pm(z) = \Omega(z), \quad z \in \mathbb{H}^\pm. \quad (3.15)$$

Через $\Omega^\pm(t), t \in \mathbb{R}$, как обычно, обозначаем предельные значения

$$\Omega^\pm(t) = \lim_{\mathbb{H}^\pm \ni z \rightarrow t} \Omega(z). \quad (3.16)$$

Напомним, что в § 3 гл. 2, см. формулу (3.49), также была определена функция $\Omega_0(t)$, содержащая интеграл в смысле главного значения:

$$\Omega_0(t) = 1 - \frac{B}{A^2}t^2 - t \frac{B}{A^2} \left(t^2 - \frac{A}{B} \right) \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(s)}{s - t} ds, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.17)$$

Приведем некоторые свойства $\Omega^\pm(z)$, используемые в дальнейшем.

Утверждение 3.7. *Значения функций $\Omega^\pm(z)$, определяемых из (3.14), (3.15), где $k(s)$ — четная функция, в симметричных точках $\pm z$ связаны равенством:*

$$\Omega^+(z) = \Omega^-(-z), \quad z \in \mathbb{H}^+, \quad (3.18)$$

а функция $\Omega_0(t)$, определяемая из (3.17), является четной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно убедиться в следующих равенствах:

$$\Omega^-(-z) = 1 - \frac{B}{A^2}(-z)^2 - (-z) \frac{B}{A^2} \left((-z)^2 - \frac{A}{B} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(s)}{s - (-z)} ds =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{B}{A^2} z^2 - (-z) \frac{B}{A^2} \left(z^2 - \frac{A}{B} \right) \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{k(-\sigma)}{-\sigma + z} d(-\sigma) = \\
&= 1 - \frac{B}{A^2} z^2 - z \frac{B}{A^2} \left(z^2 - \frac{A}{B} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(\sigma)}{\sigma - z} d\sigma = \Omega^+(z),
\end{aligned}$$

таким образом, выполняется (3.18). Четность $\Omega_0(t)$ легко проверяется непосредственно исходя из определения (3.17).

Теорема 3.6. Пусть функции $\Omega^\pm(z)$ определяются выражениями (3.14), (3.15), функция $\Omega_0(t)$ — формулой (3.17), а $k(s)$ — четная функция из класса $\mathfrak{K}$, см. определение 2, стр. 44. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Для $N \geq 1$ имеет место асимптотическая формула

$$\Omega^\pm(z) = \Omega_\infty + \sum_{n=1}^N \frac{\Omega_n}{z^{2n}} + \mathcal{O}(z^{-2N}), \quad z \rightarrow \infty, \quad \text{Im } z > \delta > 0, \quad (3.19)$$

где коэффициенты Ω_∞ и Ω_n , $n = \overline{1, N}$, — конечные величины, определяемые равенствами:

$$\begin{aligned}
\Omega_\infty &= 1 - \frac{1}{A} + \frac{B}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 k(s) ds, \\
\Omega_n &= \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{+\infty} s^{2n} \left(1 - \frac{B}{A^2} s^2 \right) k(s) ds, \quad n = \overline{1, N}.
\end{aligned} \quad (3.20)$$

2) Справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{\mathbb{H}^\pm \ni z \rightarrow \infty} \Omega^\pm(z) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Omega_0(t) = \Omega_\infty, \quad (3.21)$$

где Ω_∞ — конечная величина, определяемая по формуле (3.20)

3) Предположим, что $k(s)$ соответствует вырожденной плазме, т.е. справедливы формулы (3.7), (3.13), (3.16) из гл. 1, стр. 27:

$$\begin{aligned}
k(s) &= \frac{1}{2m_0(\alpha)(1 + \exp(s^2 - \alpha))}, \quad m_0(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{1 + \exp(s^2 - \alpha)}, \\
A &= 1 - \frac{i\omega}{\nu}, \quad B = \frac{\omega_p^2 m_0(\alpha)}{\nu^2 m_2(\alpha)}, \quad m_2(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{s^2 ds}{1 + \exp(s^2 - \alpha)},
\end{aligned}$$

тогда

$$\Omega_\infty = 1 - \frac{1}{A} + \frac{\omega_p^2}{A^2 \nu^2}. \quad (3.22)$$

4) Предположим, что $k(s)$ соответствует невырожденной плазме, т.е. справедливы формулы (4.13), (4.16) из гл. 1, стр. 31:

$$A = 1 - \frac{i\omega}{\nu}, \quad B = \frac{2\omega_p^2}{\nu^2}, \quad k(s) = \frac{e^{-s^2}}{\sqrt{\pi}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 k(s) ds = \frac{1}{2},$$

тогда

$$\Omega_\infty = 1 - \frac{1}{A} + \frac{\omega_p^2}{A^2 \nu^2}. \quad (3.23)$$

Прежде чем перейти к доказательству формул (3.21)–(3.23), приведем следующее утверждение о свойствах интеграла типа Коши.

Утверждение 3.8. *Предположим, что функция $k(s)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Тогда для $N \geq 1$ справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(s) ds}{s - z} = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{z^n} + \mathcal{O}(z^{-N-1}), \quad z \rightarrow \infty, \quad (3.24)$$

где коэффициенты a_n определяются равенствами:

$$a_n = - \int_{-\infty}^{+\infty} s^{n-1} k(s) ds. \quad (3.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, подставляя следующее представление ядра Коши в виде [39]

$$\frac{1}{s - z} = - \sum_{n=0}^N \frac{s^n}{z^{n+1}} + \left(\frac{s}{z}\right)^{N+1} \frac{1}{s - z}$$

в левую часть формулы (3.24), получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(s) ds}{s - z} = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{z^n} + \frac{a_{N+1}}{z^{N+1}} + \frac{1}{z^{N+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s^{N+1} k(s) ds}{s - z}. \quad (3.26)$$

Учитывая асимптотику $k(s)$ на бесконечности (см. определение 2), находим, что

$$\left| \frac{1}{z^{N+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s^{N+1} k(s) ds}{s - z} \right| < \frac{C}{|z^{N+1}|}, \quad z \in \overline{\mathbb{H}}^\pm, \quad |z| > |z^*|.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{a_{N+1}}{z^{N+1}} + \frac{1}{z^{N+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s^{N+1} k(s) ds}{s - z} = \mathcal{O}(z^{-N-1}), \quad z \rightarrow \infty,$$

таким образом, подставляя эту асимптотику в (3.26), получаем формулу (3.24).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.6. 1) Рассматривая четные $k(s)$ в формуле (3.24), получаем, что все коэффициенты a_n с четными номерами n равны нулю.

Тогда при $N = 3$ получаем следующую асимптотику

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(s) ds}{s - z} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^3} \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 k(s) ds + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^5}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (3.27)$$

Подставляя формулу (3.27) в выражение (3.14) для $\Omega(z)$, находим следующую асимптотику:

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{B}{A^2} z^2 + \left(\frac{1}{A} z - \frac{B}{A^2} z^3 \right) \left(-\frac{1}{z} - \frac{1}{z^3} \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 k(s) ds + \dots \right) = \\ & = 1 - \frac{B}{A^2} z^2 - \frac{1}{A} + \frac{B}{A^2} z^2 - \frac{1}{A z^2} \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 k(s) ds + \frac{B}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 k(s) ds + o(1/z) = \\ & = 1 - \frac{1}{A} + \frac{B}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 k(s) ds + o(1/z), \end{aligned}$$

формулы (3.20) и (3.21) доказаны.

2) Подставляя выражения для вырожденной плазмы в формулу (3.20)

$$1 - \frac{1}{A} + \frac{B}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 k(s) ds = 1 - \frac{1}{A} + \frac{\omega_p^2 m_0(\alpha)}{A^2 \nu^2 m_2(\alpha)} \frac{2m_2(\alpha)}{2m_0(\alpha)} = 1 - \frac{1}{A} + \frac{\omega_p^2}{A^2 \nu^2},$$

получаем формулу (3.22):

$$\Omega_\infty := \lim_{z \rightarrow \infty} \Omega(z) = 1 - \frac{1}{A} + \frac{\omega_p^2}{A^2 \nu^2}.$$

3) Аналогичные подстановки для максвелловской плазмы

$$1 - \frac{1}{A} + \frac{B}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 k(s) ds = 1 - \frac{1}{A} + \frac{2\omega_p^2}{A^2 \nu^2} \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{A} + \frac{\omega_p^2}{A^2 \nu^2}$$

доказывают формулу (3.23).

Замечание 3.8. Учитывая, что

$$A = 1 - \frac{i\omega}{\nu},$$

можно сделать вывод, что значение дисперсионной функции $\Omega(z)$ на бесконечности не зависит ни от того, какая выбрана функция $k(s)$, ни от химического потенциала α (для вырожденной плазмы), ни от коэффициента В. Значение Ω_∞ зависит только от параметров задачи — частоты внешнего поля, плазменной частоты и частоты столкновений. Справедлива формула

$$\Omega_\infty = -\frac{\omega^2 - \omega_p^2 + i\nu\omega}{(\nu - i\omega)^2}. \quad (3.28)$$

3.2. Условия существования корней дисперсионной функции $\Omega(z)$.

3.2.1. Случай комплексных корней. Наличие корней функций $\Omega^\pm(z)$ будем устанавливать с помощью вычислительных экспериментов, основанных на принципе аргумента (см. стр. 17). Отметим, что $\Omega^\pm(z)$ аналитичны в $\mathbb{H}^\pm$ и непрерывны в $\overline{\mathbb{H}^\pm}$, а кроме того, имеют непрерывную производную на вещественной оси. В силу условия (3.18) достаточно исследовать, например, функцию $\Omega^+(z)$. Предположим, что у $\Omega^+(z)$ нет вещественных корней (случай существования вещественных корней разберем позже). Будем строить образ вещественной оси $\mathbb{R}$ при отображении $\Omega^+(z)$. Если начало координат $w = 0$ окажется внутри кривой $\Gamma^+ = \Omega^+(\mathbb{R})$, то функция $\Omega^+(z)$ имеет нуль в $\mathbb{H}^+$, а если нет, то $\Omega^+(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{H}^+$. Согласно принципу аргумента приращение аргумента $(2\pi)^{-1}\Delta_{\Gamma^+} \arg w$ равно числу нулей $\Omega^+(z)$ в $\mathbb{H}^+$. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что и в случае максвелловской плазмы, и в случае вырожденной плазмы функция $\Omega^+(z)$ имеет не более одного корня в $\mathbb{H}^+$ для физически значимых диапазонов изменения параметров задачи.

Ниже в п. 3.3 приведена формула для явного вычисления корня z_0 . Однако аналитический способ включает вычисление некоторых несобственных достаточно медленно сходящихся интегралов, поэтому при нахождении корня функции $\Omega(z)$ будем использовать метод Ньютона.

Заметим, что свойства функции $\Omega(z)$ зависят от выбора функции $k(s)$ и параметров А и В, которые, в свою очередь, зависят от плазменной частоты ω_p , частоты внешнего поля ω , частоты столкновений ν и химического потенциала

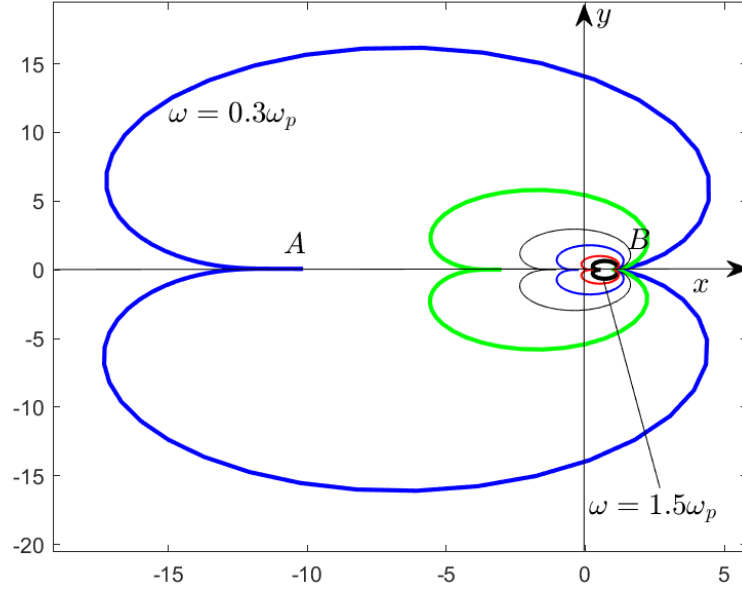


Рис. 3.3. Образы вещественной оси при $\nu/\omega_p = 0.001$ и разных ω .

α (если рассматривается случай вырожденной плазмы). Частота внешнего поля ω — единственная физически значимая величина, которой можно управлять экспериментально. Поэтому исследуем зависимость поведения функции $\Omega(z)$ от ω при фиксированных значениях остальных параметров.

В качестве примера построим образы вещественной оси $\mathbb{R}$ при отображении $w = \Omega(z)$, где $k(s) = e^{-s^2}/\sqrt{\pi}$ соответствует максвелловской плазме, $\nu = 0.001\omega_p$, а величина частоты внешнего поля ω меняется от 0,3 до 1,5 от ω_p . При выборе других параметров $k(s)$ и ν качественные результаты сохраняются.

На рис. 3.3 синяя кривая Γ^+ соответствует образу $w = \Omega(z)$ при $\omega = 0.3\omega_p$. Точка A кривой Γ^+ является образом бесконечно удаленной точки $z = \infty$, ее координаты равны $(\text{Re } \Omega_\infty, \text{Im } \Omega_\infty)$. Точка B является образом $z = 0$, ее координаты равны $(1, 0)$. С увеличением частоты внешнего поля ω вид кривой Γ^+ изменяется: уменьшается ее диаметр и образ точки $z = \infty$ сдвигается вправо, однако образом точки $z = 0$ всегда является точка B . При значении $\omega = \omega^*$ кривая Γ^+ проходит через начало координат, при значениях $\omega > \omega^*$ кривая Γ^+ уже не захватывает начало координат, что означает, что у функции $\Omega(z)$ при

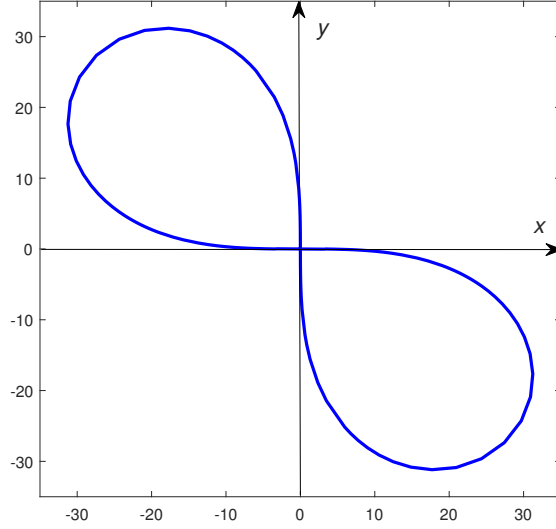


Рис. 3.4. Максвелловская плазма. Значения корней дисперсионной функции $\Omega(z)$ при $\nu/\omega_p = 0.001$ и разных ω .

$\omega > \omega^*$ нет нулей.

Перейдем к вычислению значений λ_0 в случае классической плазмы (см. стр. 31). На рис. 3.4 на комплексной плоскости λ представлены кривые $\{\lambda_0(\omega)\}$ и $\{-\lambda_0(\omega)\}$. В 4-й четверти изображены λ_0 , такие, что $\text{Im } \lambda_0 < 0$, во 2-й четверти λ_0 , такие, что $\text{Im } \lambda_0 > 0$. Выбрано такое значение частоты столкновения, что $\nu/\omega_p = 0.001$.

Далее рассмотрим вырожденную плазму (см. с. 27) и построим кривые зависимости нулей функции $\Omega(z)$ от ω при разных значениях химического потенциала.

На рис. 3.5, 3.6 даны иллюстрации зависимости λ_0 и $-\lambda_0$ от параметров α , ω , ν/ω_p . На рис. 3.5 в 4-м квадранте плоскости изображены кривые

$$\Gamma(\alpha, \nu) = \{\lambda_0 = \lambda_0(\alpha, \nu, \omega) : \Omega(\lambda_0) = 0, \text{Im } \lambda_0 \leq 0, \omega \in [0, \omega^*]\} \quad (3.29)$$

для $\nu/\omega_p = 0.01$ и трех значений $\alpha = 2, 4, 6$. Во втором квадранте рис. 3.5 изображены кривые $\tilde{\Gamma}(\alpha, \nu) := \{\lambda_0 : -\lambda_0 \in \Gamma(\alpha, \nu)\}$. На рис. 3.6 во 2-м и 4-м квадрантах изображены кривые $\tilde{\Gamma}$ и Γ соответственно для значений параметров

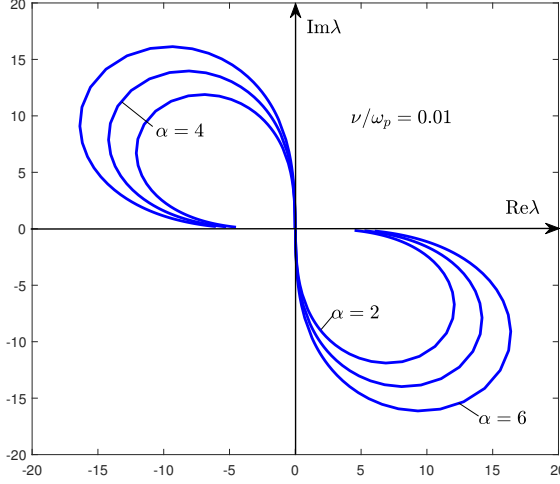


Рис. 3.5. Вырожденная плазма. Геометрическое место корней функции $\Omega(\lambda)$, $\nu/\omega_p = 0.01$, $\alpha = 2, 4, 6$.

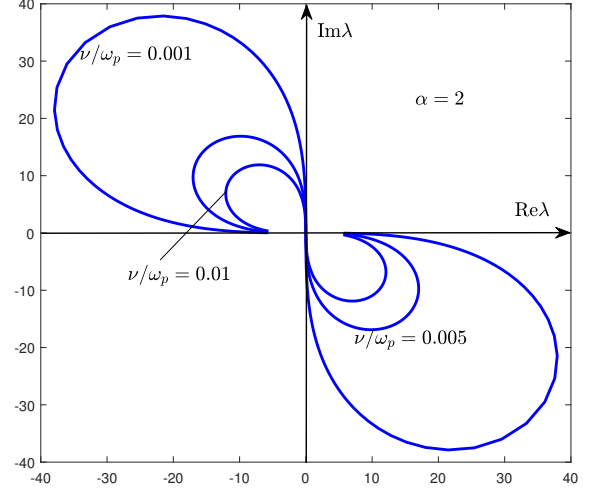


Рис. 3.6. Вырожденная плазма. Геометрическое место корней функции $\Omega(\lambda)$, $\nu/\omega_p = 0.01, 0.005, 0.001$, $\alpha = 2$.

$\alpha = 2$ и $\nu/\omega_p = 0.001, 0.005, 0.01$.

Каждая линия $\Gamma(\alpha, \nu)$ на рис. 3.5, 3.6 начинается (при $\omega = 0$) и заканчивается (при $\omega = \omega^*$) в точках положительной вещественной полуоси. Максимум модуля $\lambda_0 \in \Gamma$ достигается при $\omega = \omega_p$. Вычисления показывают, что при вариации параметров ν и α такие свойства кривых $\Gamma(\alpha, \nu)$ не изменяются.

3.2.2 Случай вещественных корней. Исследуем поведение параметрических кривых, являющихся геометрическим местом нулей дисперсионной функции, при приближении к вещественной оси. При значениях $\omega = 0$ и $\omega = \omega^*$ нулями дисперсионной функции являются вещественные числа (мнимая часть равна нулю). При значениях $\omega > \omega^*$ у дисперсионной функции нет корней. Перейдем к поиску корней с нулевой мнимой частью. Учтем, что рассматривается в данном случае предельное значение функций $\Omega^\pm(z)$ при $z \rightarrow x$

$$1 - \frac{B}{A^2}x^2 - x \frac{B}{A^2} \left(x^2 - \frac{A}{B} \right) \lim_{\mathbb{H}^\pm \ni z \rightarrow x \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(s)}{s - z} ds = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (3.30)$$

обозначим

$$I^{\pm}(x) = \lim_{z \rightarrow x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(s)}{s - z} ds = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(s)}{s - x} ds \mp \pi i k(x) = I_0(x) \mp \pi i k(x). \quad (3.31)$$

Подставим в уравнение (3.30) представление (3.31) для интеграла $I^{\pm}(x)$ и значение параметра $A = 1 - i\omega/\nu$ (см. формулу (3.16) из гл. 1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{A^2} \left(A^2 - Bx^2 - Bx \left(x^2 - \frac{A}{B} \right) (I_0(x) \pm \pi i k(x)) \right) &= 0, \\ A^2 - Bx^2 - Bx \left(x^2 - \frac{A}{B} \right) (I_0(x) \pm \pi i k(x)) &= 0, \\ 1 - 2i \frac{\omega}{\nu} - \frac{\omega^2}{\nu^2} - Bx^2 - x \left(Bx^2 - 1 + i \frac{\omega}{\nu} \right) (I_0(x) \pm \pi i k(x)) &= 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Напомним, что коэффициент B вещественный. Разделив в уравнении (3.32) вещественную и мнимую части, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 - \frac{\omega^2}{\nu^2} - Bx^2 - x (Bx^2 - 1) I_0(x) \pm \pi x k(x) \frac{\omega}{\nu} = 0, \end{cases} \quad (3.33)$$

$$\begin{cases} -2i \frac{\omega}{\nu} - xi \left(\frac{\omega}{\nu} I_0(x) \pm \pi k(x) (Bx^2 - 1) \right) = 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

При $\omega = 0$ получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (Bx^2 - 1) (1 + x I_0(x)) = 0, \\ (Bx^2 - 1) \pi x k(x) = 0. \end{cases}$$

Решением данной системы являются вещественные числа $\pm 1/\sqrt{B}$. Учитывая, что при стандартных условиях величина B имеет порядок 10^6 , то вещественный корень, соответствующий $\omega = 0$ расположен близко к началу координат (см. рис. 3.4–3.6).

Если $\omega \neq 0$, то найти аналитическое решение затруднительно, для численного решения систему уравнений (3.33), (3.34) можно преобразовать к виду:

$$\begin{cases} (1 - Bx^2)((1 + x I_0(x))(2 + x I_0(x))^2 + \pi^2 x^2 k^2(x)(1 + x I_0(x) + Bx^2)) = 0, \\ \frac{\omega}{\nu} = \pm \frac{\pi x k(x)(1 - Bx^2)}{2 + x I_0(x)}. \end{cases} \quad (3.35)$$

$$(3.36)$$

Очевидно, что найденные выше значения $x = \pm 1/\sqrt{B}$ являются решением системы (3.35), (3.36), но численная реализация показывает, что существует еще две точки $\pm x^*$. Например, для случая максвелловской плазмы при $\omega^* = 1.15$ получаем приближенные значения $x^* = \pm 0.08636$.

3.2.3. Параметры задачи, при которых существуют нули функции $\Omega(z)$. Определим значения параметров задачи, при которых существуют нули функции $\Omega(z)$. Физическими значимыми параметрами являются частота внешнего поля ω , частота столкновений ν и плазменная частота ω_p . Исходя из физического смысла этих величин, рассмотрим первую четверть координатной плоскости (ν, ω) . С помощью уравнений (3.35), (3.36) определим область D^+ , которой будут принадлежать точки (ν, ω) , при которых $\omega < \omega^*$ и, следовательно, существуют нули $\pm \lambda_0$ функций $\Omega^\pm(z)$. На горизонтальной оси при $\omega = 0$ дисперсионная функция будет иметь корень $1/\sqrt{B}$, на границе области, при $\omega = \omega^*$, дисперсионная функция будет иметь вещественный корень x^* , а при $\omega > \omega^*$ точка (ν, ω) не будет принадлежать области D^+ , и нулей у функции $\Omega(z)$ при данных параметрах не будет. Соответствующую область назовем D^- . Чтобы определить границу областей D^+ и D^- , разрешим систему уравнений (3.35), (3.36) относительно безразмерных параметров ν и ω , т.е. ν/ω_p и ω/ω_p :

$$\frac{\nu}{\omega_p} = \sqrt{\frac{\pi^2 k^2(x) x^2 p x^2}{\pi^2 k^2(x) x^2 - (\beta + 1) [\beta(\beta + 1) + \pi^2 k^2(x) x^2]}}, \quad (3.37)$$

$$\frac{\omega}{\omega_p} = \sqrt{\frac{p x^2 [\beta(\beta + 1) + \pi^2 k^2(x) x^2]^2}{\pi^2 k^2(x) x^2 - (\beta + 1) [\beta(\beta + 1) + \pi^2 k^2(x) x^2]}}, \quad (3.38)$$

$$p = \frac{B \nu^2}{\omega_p^2}, \quad \beta = 1 + x I_0(x).$$

С помощью уравнений (3.37), (3.38) можно построить кривые L на плоскости $(\nu/\omega_p, \omega/\omega_p)$, ограничивающие области D^+ и D^- . На рисунке 3.7 изображены кривые для случая вырожденной плазмы при разных значениях химического потенциала α . На рисунке 3.8 изображена кривая для случая максвелловской невырожденной плазмы. Область D^+ соответствует параметрам (ν, ω) , при ко-

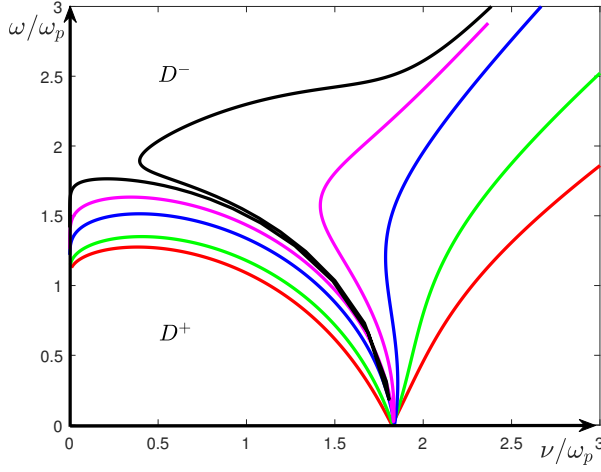


Рис. 3.7. Области D^+ и D^- для вырожденной плазмы, $\alpha = 5$ (красный цвет), 10 (зеленый), 20 (синий), 30 (розовый), 50 (черный).

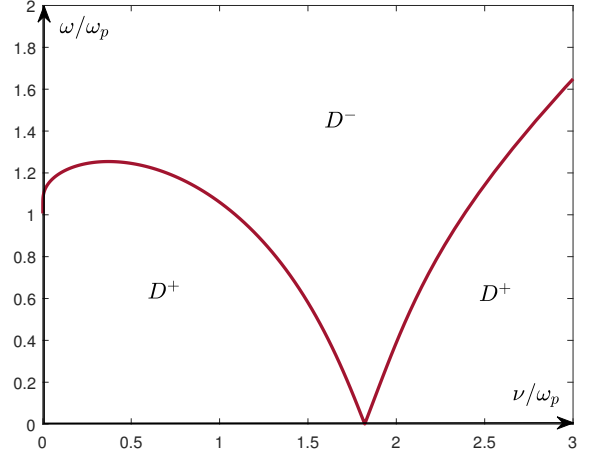


Рис. 3.8. Области D^+ и D^- для максвелловской плазмы.

торых существуют комплексные корни дисперсионной функции. Если при фиксированном значении ν увеличивать частоту внешнего поля ω , начиная с нуля, то соответствующая точка (ν, ω) будет двигаться от горизонтальной оси вверх внутри области D^+ . Достижение границы области D^+ будет означать, что достигнута частота ω^* , при которой корень становится вещественным и находится на вещественной оси (см. соотв. рис. 3.4–3.6), при дальнейшем росте ω у дисперсионной функции нет нулей, точка (ν, ω) оказывается внутри области D^- . Для вырожденной плазмы наблюдается следующий эффект: с ростом химического потенциала α изменяется форма кривой и увеличивается значение ω^* .

3.3. Аналитическое выражение для корней функции $\Omega(z)$.

Найдем явные выражения для корней $\pm z_0$ функции $\Omega(z)$, определенной по формуле (3.14), для таких параметров задачи, при которых эти корни существуют. Для этого, прежде всего, отметим, что пара функций $\Omega^+(z)$ и $\Omega^-(z)$, определенных по формулам (3.14), (3.15), является частным решением однород-

ной задачи Римана с условием сопряжения на вещественной оси:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.39)$$

где коэффициент $G(t)$ дается формулой:

$$G(t) = \frac{\Omega^+(t)}{\Omega^-(t)}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.40)$$

Предполагается, что аналитические в $\mathbb{H}^+$ и $\mathbb{H}^-$ функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ непрерывны соответственно в $\overline{\mathbb{H}^+}$ и $\overline{\mathbb{H}^-}$, а в бесконечно удаленной точке справедлива следующая асимптотика:

$$\Phi^\pm(z) = \mathcal{O}(1), \quad z \rightarrow \infty. \quad (3.41)$$

Отметим, что поскольку $\Omega^-(t) \neq 0, t \in \mathbb{R}$, то из формулы (3.15) с учетом свойств интеграла типа Коши и гладкости функции $k(s)$ функция $G(t)$ является гёльдеровой на вещественной оси.

Наложим на $\Phi^\pm(z)$ дополнительное ограничение, потребовав, чтобы выполнялось условие:

$$\Phi^+(z) = \Phi^-(-z), \quad \Phi^+(-z) = \Phi^-(z). \quad (3.42)$$

Индекс коэффициента $G(t)$ равен двум, поэтому согласно [39] преобразуем задачу (3.39) к виду:

$$\Phi^+(t) = \left(\frac{t+i}{t-i} \right)^2 \frac{\Omega^+(t)}{\Omega^-(t)} \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^2 \Phi^-(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.43)$$

коэффициентом задачи (3.43) будет выражение

$$G_1(t) = \left(\frac{t+i}{t-i} \right)^2 \frac{\Omega^+(t)}{\Omega^-(t)}, \quad (3.44)$$

индекс которого на вещественной оси равен нулю $\text{Ind } G_1(t) = 0$.

Решение задачи (3.43) $\Phi^\pm(z)$ записывается с помощью канонических функций $X^\pm(z)$:

$$\Phi^\pm(z) = \frac{X^\pm(z)}{(z+i)^2} P_2(z), \quad z \in \mathbb{H}^\pm, \quad (3.45)$$

которые согласно [39] имеют вид:

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \quad z \in \mathbb{H}^+, \quad (3.46)$$

$$X^-(z) = \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^2 e^{\Gamma^-(z)}, \quad z \in \mathbb{H}^-, \quad (3.47)$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left[\left(\frac{t+i}{t-i} \right)^2 \frac{\Omega^+(t)}{\Omega^-(t)} \right] \frac{dt}{t-z}, \quad z \in \mathbb{H}^\pm, \quad (3.48)$$

$P_2(z)$ в формуле (3.45) — многочлен второго порядка, коэффициенты которого подбираются так, чтобы выполнялись условия (3.41), (3.42).

Функции $\Phi^\pm(z)$ принимают вид:

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{(z+i)^2} e^{\Gamma^+(z)} P_2(z), \quad z \in \mathbb{H}^+, \quad (3.49)$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{(z-i)^2} e^{\Gamma^-(z)} P_2(z), \quad z \in \mathbb{H}^-, \quad (3.50)$$

$$P_2(z) = \Omega_\infty(z^2 - z_0^2), \quad z \in \mathbb{H}^\pm. \quad (3.51)$$

С помощью выражений (3.49) и (3.50) получаем явное выражение для корня функции $\Omega(z)$, которое можно вычислить с помощью любой точки z , не лежащей на вещественной оси:

$$\Omega^+(z) = \Omega_\infty \frac{1}{(z+i)^2} e^{\Gamma^+(z)} (z^2 - z_0^2), \quad z \in \mathbb{H}^+, \quad (3.52)$$

$$\Omega^-(z) = \Omega_\infty \frac{1}{(z-i)^2} e^{\Gamma^-(z)} (z^2 - z_0^2), \quad z \in \mathbb{H}^-, \quad (3.53)$$

$$z_0^2 = z^2 - \frac{\Omega^\pm(z)(z \pm i)^2}{\Omega_\infty e^{\Gamma^\pm(z)}}, \quad z \in \mathbb{H}^\pm.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3.9. Пусть функция $k(s)$ и значения параметров A, B, α задачи (3.1)–(3.8), стр. 56, таковы, что у дисперсионной функции $\Omega(z)$, определяемой формулой (3.14), существует ровно два комплексных корня $\pm z_0$. Тогда значения $\pm z_0$ вычисляются с помощью формулы:

$$z_0^2 = z^2 - \frac{\Omega^\pm(z)(z \pm i)^2}{\Omega_\infty e^{\Gamma^\pm(z)}}, \quad z \in \mathbb{H}^\pm, \quad (3.54)$$

где точка z — любая точка, не принадлежащая вещественной оси.

§4. Решение краевой задачи для системы интегро–дифференциальных уравнений

Согласно теореме 2.5 гл. 2, см. стр. 69, вид общего решения $\mathcal{F}(x, v), \mathcal{E}(x)$ системы уравнений (3.1), (3.2), приведенной на стр. 56, зависит от существования комплексных нулей дисперсионной функции $\Omega(z)$, определенной по формуле (3.48). Поэтому при построении решения краевой задачи (3.1)–(3.8), стр. 56, на основе представлений (3.63), (3.64) будем отдельно рассматривать случай, когда $\Omega(z)$ не имеет нулей, и случай, когда такие нули существуют. В п. 4.1 построено решение краевой задачи (3.1)–(3.8), стр. 56, если

$$\Omega^{\pm}(z) \neq 0, \quad z \in \overline{\mathbb{H}^{\pm}}. \quad (4.55)$$

Затем в п. 4.2 найдено решение этой задачи в предположении, что каждая из функций $\Omega^{\pm}(z)$ имеет один простой корень соответственно в верхней и нижней полуплоскости, т.е., принимая во внимание свойство (3.18), существуют $\pm z_0 \in \mathbb{H}^{\pm}$ такие, что

$$\Omega^{\pm}(\pm z_0) = 0. \quad (4.56)$$

Напомним, см. п. 3.2, стр. 78, что случаи (4.55), (4.56) возникают, если $\Omega(z)$, определяемая по формуле (3.48), соответствует распределениям Ферми — Дирака или Максвелла в физически значимых диапазонах параметров, при этом функция $k(s)$ вычисляется согласно (3.13) или (4.13), см. стр. 27, 31.

4.1. Решение краевой задачи для случая, когда дисперсионная функция $\Omega(z)$ не обращается в нуль.

Согласно теореме 2.5 и замечанию 2.7 к ней, общее решение системы (3.1), (3.2) при выполнении условия (4.55) имеет вид:

$$\begin{cases} \mathcal{F}(x, v) = \frac{Q_0 v}{A \Omega_{\infty}} + \frac{B}{iA} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda) k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \chi(\lambda, v) e^{-Ax/\lambda} d\lambda - \frac{Q(v)}{iv} e^{-Ax/v}, \end{cases} \quad (4.57)$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}(x) = \frac{Q_0}{\Omega_{\infty}} + \frac{B}{iA} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda) k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} e^{-Ax/\lambda} d\lambda, \end{cases} \quad (4.58)$$

где функция $\Omega_0(\lambda)$ определена формулой (3.17), $\varkappa(\lambda, v)$ — см. гл. 2 (3.52),

$$\varkappa(\lambda, v) = \frac{1}{A} \left(\frac{\lambda^2 - A/B}{\lambda - v} - \lambda \right), \quad (4.59)$$

Q_0 — свободная константа, $Q(v)$ — произвольная функция, а интеграл в выражении (3.61) понимается в смысле главного значения по Коши.

Найдем такие Q_0 и $Q(v)$, что функции (4.57), (4.58) удовлетворяют краевым условиям (3.4), (3.5) из главы 1, т.е.:

$$\mathcal{F}(l, v) = \mathcal{F}(l, -v), \quad \mathcal{F}(-l, v) = \mathcal{F}(-l, -v), \quad v \in (-\infty, +\infty), \quad (4.60)$$

$$\mathcal{E}(l) = 1, \quad \mathcal{E}(-l) = 1. \quad (4.61)$$

Подставляя в представление (4.57) в качестве аргумента (l, v) и $(l, -v)$, находим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(l, v) &= \frac{Q_0 v}{A \Omega_\infty} + \frac{B}{iA} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \varkappa(\lambda, v) e^{-Al/\lambda} d\lambda - \frac{Q(v)}{iv} e^{-Al/v} = \\ &= \frac{Q_0 v}{A \Omega_\infty} + \frac{B}{iA^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \left(\frac{\lambda^2 - A/B}{\lambda - v} - \lambda \right) e^{-Al/\lambda} d\lambda - \frac{Q(v)}{iv} e^{-Al/v}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

а также

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(l, -v) &= -\frac{Q_0 v}{A \Omega_\infty} + \frac{B}{iA} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \varkappa(\lambda, -v) e^{-Al/\lambda} d\lambda - \frac{Q(-v)}{i(-v)} e^{Al/v} = \\ &= -\frac{Q_0 v}{A \Omega_\infty} + \frac{B}{iA^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \left(\frac{\lambda^2 - A/B}{\lambda + v} - \lambda \right) e^{-Al/\lambda} d\lambda + \frac{Q(-v)}{iv} e^{Al/v}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Подставляя (4.62), (4.63) в первое краевое условие (4.60), т.е. $\mathcal{F}(l, v) = \mathcal{F}(l, -v)$, получаем уравнение для $Q(v)$:

$$\begin{aligned} \frac{2Q_0 v}{A \Omega_\infty} + \frac{B}{iA^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \frac{(\lambda^2 - A/B)}{\lambda - v} e^{-Al/\lambda} d\lambda = \\ = \frac{B}{iA^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \frac{(\lambda^2 - A/B)}{\lambda + v} e^{-Al/\lambda} d\lambda + \frac{1}{iv} \left(Q(v) e^{-Al/v} + Q(-v) e^{Al/v} \right), \end{aligned} \quad (4.64)$$

в которое Q_0 входит как параметр. Выполняя в интеграле в правой части (4.64) замену переменных $\lambda = -t$, находим:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \frac{(\lambda^2 - A/B)}{\lambda + v} e^{-Al/\lambda} d\lambda &= \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{Q(-t)k(-t)}{\Omega_0(-t)} \frac{(t^2 - A/B)}{-t + v} e^{Al/t} d(-t) = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(-\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \frac{(\lambda^2 - A/B)}{\lambda - v} e^{Al/\lambda} d\lambda. \end{aligned}$$

Подставляя такое выражение для интеграла в (4.64), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{2Q_0v}{A\Omega_\infty} + \frac{B}{iA^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(Q(\lambda)e^{-Al/\lambda} + Q(-\lambda)e^{Al/\lambda}) k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \frac{(\lambda^2 - A/B)}{\lambda - v} d\lambda = \\ = \frac{1}{iv} \left(Q(v)e^{-Al/v} + Q(-v)e^{Al/v} \right). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Напомним, что здесь интеграл понимается в смысле главного значения. Введем новую неизвестную функцию

$$f_1(v) = Q(v)e^{-Al/v} + Q(-v)e^{Al/v} \quad (4.66)$$

и из (4.65) получим для нее сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{f_1(v)}{iv} - \frac{B}{iA^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\lambda^2 - A/B)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \frac{f_1(\lambda)}{\lambda - v} d\lambda = \frac{2Q_0v}{A\Omega_\infty}, \quad (4.67)$$

которое, отметим, имеет вид (2.1), указанный на стр. 71. Аналогично, подставляя (4.57) во второе краевое условие (4.60), т.е. в $\mathcal{F}(-l, v) = \mathcal{F}(-l, -v)$, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{2Q_0v}{A\Omega_\infty} + \frac{B}{iA^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(Q(\lambda)e^{Al/\lambda} + Q(-\lambda)e^{-Al/\lambda}) k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \frac{(\lambda^2 - A/B)}{\lambda - v} d\lambda = \\ = \frac{1}{iv} \left(Q(v)e^{Al/v} + Q(-v)e^{-Al/v} \right). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Введем функцию

$$f_2(v) = Q(v)e^{Al/v} + Q(-v)e^{-Al/v}, \quad (4.69)$$

которая, согласно (4.68), удовлетворяет уравнению

$$\frac{f_2(v)}{iv} - \frac{B}{iA^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\lambda^2 - A/B)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \frac{f_2(\lambda)}{\lambda - v} d\lambda = \frac{2Q_0v}{A\Omega_\infty}. \quad (4.70)$$

Заметим, что сингулярные интегральные уравнения (4.67) и (4.70) относительно функций f_1 и f_2 имеют вид

$$\frac{f(v)}{iv} - \frac{B}{iA^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \frac{(\lambda^2 - A/B)}{\lambda - v} d\lambda = \frac{2Q_0v}{A\Omega_{\infty}} \quad (4.71)$$

и перейдем к решению уравнения (4.71).

Обозначая подынтегральное выражение в (4.71) через $\varphi(\lambda)$

$$\varphi(\lambda) = \frac{f(\lambda)k(\lambda)(\lambda^2 - A/B)}{\Omega_0(\lambda)}, \quad f(v) = \frac{\varphi(v)\Omega_0(v)}{k(v)(v^2 - A/B)}, \quad (4.72)$$

перепишем (4.71) в виде

$$-\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{A^2}{Bv} \cdot \frac{\Omega_0(v)}{k(v)(v^2 - A/B)} \varphi(v) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)d\lambda}{\lambda - v} = -\frac{AQ_0v}{\pi B\Omega_{\infty}}, \quad v \in \mathbb{R}. \quad (4.73)$$

Мы получили сингулярное интегральное уравнение (4.73), имеющее вид (2.1), где функции $a(v), b(v), \gamma(v)$ даются равенствами

$$\begin{aligned} a(v) &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{A^2}{Bv} \frac{\Omega_0(v)}{k(v)(v^2 - A/B)}, \\ b(v) &= \frac{1}{2}, \\ \gamma(v) &= -\frac{AQ_0v}{\pi B\Omega_{\infty}}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Перейдем к решению уравнения (4.73). Введем аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскостях $\mathbb{H}^{\pm}$ функции $\Phi^{\pm}(z)$ с помощью равенств:

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)d\lambda}{\lambda - z}, \quad z \in \mathbb{H}^{\pm}, \quad (4.75)$$

и запишем формулы Сохоцкого:

$$\Phi(v) = \frac{1}{2} (\Phi^+(v) + \Phi^-(v)), \quad v \in \mathbb{R}, \quad (4.76)$$

$$\varphi(v) = \Phi^+(v) - \Phi^-(v), \quad v \in \mathbb{R}. \quad (4.77)$$

где $\Phi(v)$ — следующий интеграл, понимаемый в смысле главного значения:

$$\Phi(v) = \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)d\lambda}{\lambda - v}, \quad v \in \mathbb{R},$$

а $\Phi^+(v)$ и $\Phi^-(v)$ соответственно предельные значения функций (4.75) в точке $v \in \mathbb{R}$. Заметим, что для функции $\Omega_0(z)$, определяемой с помощью интеграла типа Коши (3.17), формулы Сохоцкого имеют вид:

$$\Omega_0(v) = \frac{1}{2} (\Omega^+(v) + \Omega^-(v)), \quad v \in \mathbb{R}, \quad (4.78)$$

$$\frac{B}{A^2} vk(v) \left(v^2 - \frac{A}{B} \right) = \frac{1}{2\pi i} (\Omega^-(v) - \Omega^+(v)), \quad v \in \mathbb{R}. \quad (4.79)$$

Подставив (4.76)–(4.79) в уравнение (4.73), получаем выражения для функций $G(v)$ и $g(v)$:

$$\begin{aligned} G(v) &= \frac{a(v) - b(v)}{a(v) + b(v)} = \frac{-\frac{1}{2\pi i} \frac{A^2}{Bv} \frac{\Omega_0(v)}{k(v)(v^2 - A/B)} - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2\pi i} \frac{A^2}{Bv} \frac{\Omega_0(v)}{k(v)(v^2 - A/B)} + \frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\Omega_0(v) + \pi i B / A^2 vk(v)(v^2 - A/B)}{\Omega_0(v) - \pi i B / A^2 vk(v)(v^2 - A/B)} = \frac{\Omega^-(v)}{\Omega^+(v)}, \\ g(v) &= \frac{\gamma(v)}{a(v) + b(v)} = \frac{-\frac{AQ_0v}{\pi B \Omega_\infty}}{-\frac{1}{2\pi i} \frac{A^2}{Bv} \frac{\Omega_0(v)}{k(v)(v^2 - A/B)} + \frac{1}{2}} = \frac{AQ_0v}{\pi B \Omega_\infty} \cdot \frac{\Omega^-(v) - \Omega^+(v)}{\Omega^+(v)}. \end{aligned}$$

Таким образом, краевое условие задачи Римана (см. также § 2, формулу (2.12)) имеет вид:

$$\Phi^+(v) = G(v)\Phi^-(v) + g(v), \quad v \in \mathbb{R}, \quad (4.80)$$

где коэффициент $G(v)$ и правая часть $g(v)$ определяются равенствами:

$$G(v) = \frac{\Omega^-(v)}{\Omega^+(v)}, \quad g(v) = \frac{AQ_0v}{\pi B \Omega_\infty} \cdot \frac{\Omega^-(v) - \Omega^+(v)}{\Omega^+(v)}, \quad v \in \mathbb{R}. \quad (4.81)$$

Обратим внимание на то, что поскольку $\Omega^\pm(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{H}^\pm$, согласно принятому условию, то индекс функции $G(v)$ равен нулю. Нам потребуется следующее

Определение 8. Будем говорить, что функция $\Phi(z)$ принадлежит классу $\mathcal{H}_0$, если она является аналитической в верхней и нижней полуплоскостях $\mathbb{H}^\pm$, функции $\Phi^\pm(z)$ непрерывны соответственно в $\overline{\mathbb{H}^\pm}$ и предел $\Phi^\pm(z)$ при $z \rightarrow \infty$ равен нулю.

Перейдем к решению задачи Римана (4.80), (4.81) в классе $\mathcal{H}_0$. Подставляя явно факторизованный коэффициент $G(v) = \Omega^-(v)/\Omega^+(v)$ в (4.80) и учитывая

представление для $g(v)$ из (4.81), получаем из (4.80) следующее равенство:

$$\Omega^+(v) \left(\Phi^+(v) + \frac{AQ_0v}{\pi B \Omega_\infty} \right) = \Omega^-(v) \left(\Phi^-(v) + \frac{AQ_0v}{\pi B \Omega_\infty} \right). \quad (4.82)$$

Определим функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$, аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскостях по формулам

$$F^\pm(z) = \Omega^\pm(z) \left(\Phi^\pm(z) + \frac{AQ_0v}{\pi B \Omega_\infty} \right), \quad z \in \mathbb{H}^\pm, \quad (4.83)$$

и заметим, что краевое условие (4.82) может быть записано в виде

$$F^+(v) = F^-(v), \quad v \in \mathbb{R}. \quad (4.84)$$

Таким образом, функция $F(z)$, определенная по формуле (4.83), является аналитической в открытой плоскости $\mathbb{C}$.

Применяя теорему Лиувилля, см. стр. 17, учитывая линейный рост $F^\pm(z)$ и условие (4.84), приходим к выводу, что функция $F(z)$ является многочленом первого порядка, т.е.

$$F(z) = c_0 + c_1 z, \quad (4.85)$$

где c_0 и c_1 — некоторые, вообще говоря, комплексные коэффициенты. Подставляя (4.85) в левую часть (4.83), находим

$$\Phi(z) = \frac{c_1 z + c_0}{\Omega(z)} - \frac{AQ_0}{\pi B \Omega_\infty} z. \quad (4.86)$$

Значение функции $\Omega(z)$ на бесконечности равно константе Ω_∞ (см. теорему 3.6 § 3 гл. 3), а функции $\Phi^\pm(z)$ согласно (4.75) являются бесконечно малыми при $z \rightarrow \infty$. Чтобы удовлетворить этим условиям, константу c_1 следует положить равной $\frac{AQ_0}{\pi B}$, а учитывая поведение $\Phi(z)$ на бесконечности, константу c_0 следует считать равной нулю. Таким образом, из (4.86) находим

$$\Phi(z) = \frac{AQ_0}{\pi B} \left(\frac{1}{\Omega(z)} - \frac{1}{\Omega_\infty} \right). \quad (4.87)$$

Суммируя сказанное, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.7. Пусть функция $\Omega(z)$, определенная по формуле (3.14), такова, что $\Omega^\pm(z) \neq 0$, $z \in \overline{\mathbb{H}^\pm}$. Тогда единственное решение задачи Римана (4.80),

(4.81) в классе $\mathcal{H}_0$ дается формулой (4.87), где значения A, B, Ω_∞ определяются формулами (3.16), (4.16) из гл. 1 и формулой (3.20) из настоящей главы, а величина Q_0 является свободной константой.

Возвращаясь к решению сингулярного интегрального уравнения (4.73), с помощью формул Сохоцкого (4.77)–(4.79) получаем выражение для функции $\varphi(v)$:

$$\begin{aligned}\varphi(v) &= \Phi^+(v) - \Phi^-(v) = \frac{AQ_0v}{\pi B} \left(\frac{1}{\Omega^+(v)} - \frac{1}{\Omega^-(v)} \right) = \\ &= \frac{AQ_0v}{\pi B} \cdot \frac{\Omega^-(v) - \Omega^+(v)}{\Omega^-(v)\Omega^+(v)} = \frac{2iQ_0v^2k(v)(v^2 - A/B)}{A\Omega^+(v)\Omega^-(v)}.\end{aligned}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.8. *Решением сингулярного интегрального уравнения (4.73) является функция $\varphi(v)$, определяемая формулой*

$$\varphi(v) = \frac{2iQ_0v^2k(v)(v^2 - A/B)}{A\Omega^+(v)\Omega^-(v)}, \quad (4.88)$$

где значения A, B, Ω_∞ даются равенствами (3.16), (4.16) из гл. 1 и формулой (3.20) из настоящей главы, а величина Q_0 является свободной константой.

Используя формулу (4.72), найдем функцию $f(v)$, которая будет решением уравнения (4.71):

$$f(v) = \frac{\Omega_0(v)}{k(v)(v^2 - A/B)} \frac{2iQ_0v^2k(v)(v^2 - A/B)}{A\Omega^+(v)\Omega^-(v)} = \frac{2iQ_0v^2\Omega_0(v)}{A\Omega^+(v)\Omega^-(v)}. \quad (4.89)$$

Напомним, что ранее были введены две функции f_1 и f_2 , которые должны были удовлетворять уравнению (4.71):

$$\begin{aligned}f_1(v) &= Q(v)e^{-Al/v} + Q(-v)e^{Al/v}, \\ f_2(v) &= Q(v)e^{Al/v} + Q(-v)e^{-Al/v}.\end{aligned}$$

Чтобы функция $Q(v)$ удовлетворяла условиям задачи (3.1)–(3.5), необходимо, чтобы и $f_1(v)$, и $f_2(v)$ являлись решением уравнения (4.71), т.е. совпадали с

функцией $f(v)$:

$$\begin{aligned}
f_1(v) &= f_2(v) \Rightarrow \\
Q(v)e^{-Al/v} + Q(-v)e^{Al/v} &= Q(v)e^{Al/v} + Q(-v)e^{-Al/v} \Rightarrow \\
Q(v)\text{sh}(Al/v) &= Q(-v)\text{sh}(Al/v) \Rightarrow \\
Q(v) &= Q(-v).
\end{aligned}$$

Таким образом, искомая функция $Q(v)$ является четной функцией. Учитывая выражение (4.89), запишем итоговое представление для функции $Q(v)$:

$$Q(v) = \frac{iQ_0v^2\Omega_0(v)}{\text{Ach}(Al/v)\Omega^+(v)\Omega^-(v)}. \quad (4.90)$$

Найденная функция $Q(v)$ выражается через неизвестную константу Q_0 . Для нахождения Q_0 подставим выражение (4.90) для $Q(v)$ в граничное условие (4.61) и получим равенство

$$Q_0 \left(\frac{1}{\Omega_\infty} + \frac{B}{A^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 k(\lambda) d\lambda}{\Omega^+(\lambda)\Omega^-(\lambda)} \right) = 1,$$

откуда находим

$$Q_0 = \left(\frac{1}{\Omega_\infty} + \frac{B}{A^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 k(\lambda) d\lambda}{\Omega^+(\lambda)\Omega^-(\lambda)} \right)^{-1}. \quad (4.91)$$

Таким образом, используя граничные условия задачи (3.1)–(3.5), получены константа Q_0 и функция $Q(v)$ для случая, когда функции $\Omega^\pm(z)$ не имеют корней на всей комплексной плоскости. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.9. *Решением краевой задачи (3.1)–(3.8), стр. 56, в случае, когда дисперсионная функция $\Omega(z)$ не имеет корней на всей комплексной плоскости, являются функции*

$$\begin{cases} \mathcal{F}(x, v) = \frac{Q_0v}{A\Omega_\infty} + \frac{B}{iA} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \varkappa(\lambda, v) e^{-Ax/\lambda} d\lambda - \frac{Q(v)}{iv} e^{-Ax/v}, \\ \mathcal{E}(x) = \frac{Q_0}{\Omega_\infty} + \frac{B}{iA} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} e^{-Ax/\lambda} d\lambda, \end{cases}$$

где функции $\Omega_0(\lambda)$ и $\varkappa(\lambda, v)$ определены соответственно формулами (3.17) и (4.59), а функция $Q(v)$ и константа Q_0 даются равенствами (4.90) и (4.91) соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вывод указанных формул произведен перед формулировкой теоремы. Докажем, что функция $Q(v)$ такова, что произведение $Q(v)k(v)$ принадлежит классу функций $\mathfrak{G}_0$, а выражение $Q(v)/(-iv)$ принимает конечное значение при всех допустимых значениях параметра v .

Напомним, что функция $g_0(\mu)$ принадлежит классу $\mathfrak{G}_0$, если она определена и ограничена при всех $\mu \in (-\infty, \infty)$ и является бесконечно малой при $\mu \rightarrow \infty$ и при $\mu \rightarrow 0$, причем в нуле $g_0(\mu) = \mathcal{O}(e^{-c|A/\mu|})$, а при $\mu \rightarrow \infty$ она убывает быстрее любой степени аргумента, т.е. $g_0(\mu) = o(1/\mu^k)$.

Согласно (4.90)

$$Q(v) = \frac{iQ_0v^2\Omega_0(v)}{\text{Ach}(Al/v)\Omega^+(v)\Omega^-(v)}.$$

То есть выражение $Q(v)/(-iv)$ равно

$$\frac{Q(v)}{-iv} = -\frac{Q_0v\Omega_0(v)}{\text{Ach}(Al/v)\Omega^+(v)\Omega^-(v)},$$

при $v \in (-\infty, +\infty)$ указанное выражение ограничено, при $v \rightarrow \pm\infty$ оно равно $\mathcal{O}(v)$. Это позволяет утверждать, что при всех конечных значениях параметра v существует конечное значение у выражения $Q(v)/(-iv)$.

Произведение $Q(v)k(v)$ равно

$$Q(v)k(v) = \frac{iQ_0v^2\Omega_0(v)k(v)}{\text{Ach}(Al/v)\Omega^+(v)\Omega^-(v)}.$$

Учитывая свойства функций $\Omega_0(v), \Omega^\pm(v)$ (см. § 3) и принадлежность функции $k(v)$ классу $\mathfrak{K}$, можно утверждать, что произведение $Q(v)k(v)$ принадлежит классу $\mathfrak{G}_0$.

Теорема доказана.

4.2. Решение краевой задачи для случая, когда дисперсионная функция $\Omega(z)$ обращается в нуль.

Согласно теореме 2.5, общее решение системы (3.1), (3.2) из гл. 2 имеет вид, см. стр. 69:

$$\begin{cases} \mathcal{F}(x, v) = \frac{Q_0 v}{A \Omega_\infty} + \mathcal{N}_{\mathcal{F}}(x, v) + \frac{B}{iA} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \varkappa(\lambda, v) e^{-Ax/\lambda} d\lambda - \\ - \frac{Q(v)}{iv} e^{-Ax/v}, \\ \mathcal{E}(x) = \frac{Q_0}{\Omega_\infty} + \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(x) + \frac{B}{iA} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} e^{-Ax/\lambda} d\lambda, \end{cases} \quad (4.92)$$

Пусть $\Omega(z)$ имеет два корня единичной кратности, $\lambda_1 = \lambda_0$, $\lambda_2 = -\lambda_0$, тогда слагаемые $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(x, v)$ и $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(x)$ из выражений (4.92), (4.93), соответствующие нулям дисперсионной функции $\Omega(z)$, имеют вид:

$$\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(x) = -\frac{B\lambda_0}{A} \left(Q_1 e^{-Ax/\lambda_0} - Q_2 e^{Ax/\lambda_0} \right), \quad (4.94)$$

$$\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(x, v) = -\frac{B\lambda_0}{A} \left(Q_1 \varkappa(\lambda_0, v) e^{-Ax/\lambda_0} - Q_2 \varkappa(-\lambda_0, v) e^{Ax/\lambda_0} \right), \quad (4.95)$$

здесь $\varkappa(\lambda_0, v)$ задается формулой, см. (4.59):

$$\varkappa(\lambda_0, v) = \frac{1}{A} \left(\frac{\lambda_0^2 - A/B}{\lambda_0 - v} - \lambda_0 \right), \quad (4.96)$$

Q_0, Q_1, Q_2 — свободные константы, $Q(v)$ — произвольная функция.

Найдем такие значения констант Q_0, Q_1, Q_2 и вид функции $Q(v)$, что функции (4.92), (4.93), являющиеся решением системы (3.1), (3.2) из гл. 2, удовлетворяют краевым условиям (3.4), (3.5) из гл. 2, т.е.:

$$\mathcal{F}(l, v) = \mathcal{F}(l, -v), \quad \mathcal{F}(-l, v) = \mathcal{F}(-l, -v), \quad v \in (-\infty, +\infty), \quad (4.97)$$

$$\mathcal{E}(l) = 1, \quad \mathcal{E}(-l) = 1. \quad (4.98)$$

С учетом вышесказанного перепишем решение в виде:

$$\begin{cases} \mathcal{F}(x, v) = \frac{Q_0 v}{A \Omega_\infty} - \frac{B}{A} \cdot Q_1 \lambda_0 \varkappa(\lambda_0, v) e^{-Ax/\lambda_0} + \frac{B}{A} \cdot Q_2 \lambda_0 \varkappa(-\lambda_0, v) e^{Ax/\lambda_0} + \\ + \frac{B}{iA} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \varkappa(\lambda, v) e^{-Ax/\lambda} d\lambda - \frac{Q(v)}{iv} e^{-Ax/v}, \\ \mathcal{E}(x) = \frac{Q_0}{\Omega_\infty} - \frac{B}{A} \cdot Q_1 \lambda_0 e^{-Ax/\lambda_0} + \frac{B}{A} \cdot Q_2 \lambda_0 e^{Ax/\lambda_0} + \\ + \frac{B}{iA} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} e^{-Ax/\lambda} d\lambda. \end{cases} \quad (4.99)$$

$$\begin{cases} \mathcal{F}(x, v) = \frac{Q_0 v}{A \Omega_\infty} - \frac{B}{A} \cdot Q_1 \lambda_0 \varkappa(\lambda_0, v) e^{-Ax/\lambda_0} + \frac{B}{A} \cdot Q_2 \lambda_0 \varkappa(-\lambda_0, v) e^{Ax/\lambda_0} + \\ + \frac{B}{iA} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \varkappa(\lambda, v) e^{-Ax/\lambda} d\lambda - \frac{Q(v)}{iv} e^{-Ax/v}, \\ \mathcal{E}(x) = \frac{Q_0}{\Omega_\infty} - \frac{B}{A} \cdot Q_1 \lambda_0 e^{-Ax/\lambda_0} + \frac{B}{A} \cdot Q_2 \lambda_0 e^{Ax/\lambda_0} + \\ + \frac{B}{iA} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} e^{-Ax/\lambda} d\lambda. \end{cases} \quad (4.100)$$

Используя представление (4.99), найдем значения $\mathcal{F}(l, v)$ и $\mathcal{F}(l, -v)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(l, v) &= \frac{Q_0 v}{A\Omega_\infty} - \frac{B}{A^2} \cdot Q_1 \lambda_0 \left(\frac{\lambda_0^2 - A/B}{\lambda_0 - v} - \lambda_0 \right) e^{-Al/\lambda_0} + \\
&\quad + \frac{B}{A} \cdot Q_2 \lambda_0 \left(\frac{\lambda_0^2 - A/B}{\lambda_0 - v} + \lambda_0 \right) e^{Al/\lambda_0} + \\
&\quad + \frac{B}{iA^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \left(\frac{\lambda^2 - A/B}{\lambda - v} - \lambda \right) e^{-Al/\lambda} d\lambda - \frac{Q(v)}{iv} e^{-Al/v}, \\
\mathcal{F}(l, -v) &= -\frac{Q_0 v}{A\Omega_\infty} - \frac{B}{A^2} \cdot Q_1 \lambda_0 \left(\frac{\lambda_0^2 - A/B}{\lambda_0 + v} - \lambda_0 \right) e^{-Al/\lambda_0} + \\
&\quad + \frac{B}{A} \cdot Q_2 \lambda_0 \left(\frac{\lambda_0^2 - A/B}{\lambda_0 + v} + \lambda_0 \right) e^{Al/\lambda_0} + \\
&\quad + \frac{B}{iA^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \left(\frac{\lambda^2 - A/B}{\lambda + v} - \lambda \right) e^{-Al/\lambda} d\lambda + \frac{Q(-v)}{iv} e^{Al/v},
\end{aligned}$$

Учитывая равенство $\mathcal{F}(l, v) = \mathcal{F}(l, -v)$ из (4.97), получаем уравнение

$$\begin{aligned}
&\frac{2Q_0 v}{A\Omega_\infty} + \frac{B}{A^2} \cdot (\lambda_0^2 - A/B) Q_1 \lambda_0 \left(\frac{1}{\lambda_0 + v} - \frac{1}{\lambda_0 - v} \right) e^{-Al/\lambda_0} - \\
&\quad - \frac{B}{A^2} \cdot (\lambda_0^2 - A/B) Q_2 \lambda_0 \left(\frac{1}{\lambda_0 + v} - \frac{1}{\lambda_0 - v} \right) e^{Al/\lambda_0} + \\
&\quad + \frac{B}{iA^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda)k(\lambda)(\lambda^2 - A/B)}{\Omega_0(\lambda)} \frac{e^{-Al/\lambda} d\lambda}{\lambda - v} - \frac{Q(v)}{iv} e^{-Al/v} = \\
&\quad + \frac{B}{iA^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda)k(\lambda)(\lambda^2 - A/B)}{\Omega_0(\lambda)} \frac{e^{-Al/\lambda} d\lambda}{\lambda + v} + \frac{Q(-v)}{iv} e^{Al/v}, \quad (4.101)
\end{aligned}$$

Интеграл из правой части (4.101) преобразуем с помощью замены переменных $\lambda = -t$, учтем четность функций $k(t)$ и $\Omega_0(t)$:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \frac{(\lambda^2 - A/B)}{\lambda + v} e^{-Al/\lambda} d\lambda = \\
&= \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{Q(-t)k(-t)}{\Omega_0(-t)} \frac{(t^2 - A/B)}{-t + v} e^{Al/t} d(-t) = \\
&= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(-\lambda)k(\lambda)}{\Omega_0(\lambda)} \frac{(\lambda^2 - A/B)}{\lambda - v} e^{Al/\lambda} d\lambda.
\end{aligned}$$

Равенство (4.101) перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \frac{2Q_0v}{A\Omega_\infty} + \frac{2Bv\lambda_0(\lambda_0^2 - A/B)}{A^2(v^2 - \lambda_0^2)} \left(Q_1 e^{-Al/\lambda_0} - Q_2 e^{Al/\lambda_0} \right) + \\
& + \frac{B}{iA^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(Q(\lambda)e^{-Al/\lambda} + Q(-\lambda)e^{Al/\lambda}) k(\lambda) (\lambda^2 - A/B)}{\Omega_0(\lambda)} \frac{d\lambda}{\lambda - v} = \\
& = \frac{1}{iv} \left(Q(v)e^{-Al/v} + Q(-v)e^{Al/v} \right). \tag{4.102}
\end{aligned}$$

Интеграл в (4.102) понимается в смысле главного значения. Введем новую неизвестную функцию

$$f_1(v) = Q(v)e^{-Al/v} + Q(-v)e^{Al/v}, \tag{4.103}$$

и из (4.102) получим для нее сингулярное интегральное уравнение вида (2.1), см. стр. 71:

$$\begin{aligned}
& \frac{f_1(v)}{iv} - \frac{B}{iA^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(\lambda)k(\lambda) (\lambda^2 - A/B)}{\Omega_0(\lambda)} \frac{d\lambda}{\lambda - v} = \\
& = \frac{2Q_0v}{A\Omega_\infty} + \frac{2Bv\lambda_0(\lambda_0^2 - A/B)}{A^2(v^2 - \lambda_0^2)} \left(Q_1 e^{-Al/\lambda_0} - Q_2 e^{Al/\lambda_0} \right). \tag{4.104}
\end{aligned}$$

Аналогично, подставляя (4.92) во второе краевое условие (4.97), т.е. в условие $\mathcal{F}(-l, v) = \mathcal{F}(-l, -v)$, получаем:

$$\begin{aligned}
& \frac{2Q_0v}{A\Omega_\infty} + \frac{2Bv\lambda_0(\lambda_0^2 - A/B)}{A^2(v^2 - \lambda_0^2)} \left(Q_1 e^{Al/\lambda_0} - Q_2 e^{-Al/\lambda_0} \right) + \\
& + \frac{B}{iA^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(Q(\lambda)e^{Al/\lambda} + Q(-\lambda)e^{-Al/\lambda}) k(\lambda) (\lambda^2 - A/B)}{\Omega_0(\lambda)} \frac{d\lambda}{\lambda - v} = \\
& = \frac{1}{iv} \left(Q(v)e^{Al/v} + Q(-v)e^{-Al/v} \right). \tag{4.105}
\end{aligned}$$

Введем функцию

$$f_2(v) = Q(v)e^{Al/v} + Q(-v)e^{-Al/v}, \tag{4.106}$$

заметим, что она должна удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned}
& \frac{f_2(v)}{iv} - \frac{B}{iA^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_2(\lambda)k(\lambda) (\lambda^2 - A/B)}{\Omega_0(\lambda)} \frac{d\lambda}{\lambda - v} = \\
& = \frac{2Q_0v}{A\Omega_\infty} + \frac{2Bv\lambda_0(\lambda_0^2 - A/B)}{A^2(v^2 - \lambda_0^2)} \left(Q_1 e^{Al/\lambda_0} - Q_2 e^{-Al/\lambda_0} \right). \tag{4.107}
\end{aligned}$$

Таким образом, сингулярные интегральные уравнения относительно функций f_1 и f_2 имеют вид:

$$\frac{A^2}{2\pi i B v} f(v) - \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k(\lambda)(\lambda^2 - A/B)}{\Omega_0(\lambda)} \frac{f(\lambda)}{\lambda - v} d\lambda = q_1 v + \frac{q_2 v}{v^2 - \lambda_0^2}. \quad (4.108)$$

Здесь

$$q_1 = \frac{A Q_0}{\pi B \Omega_{\infty}}, \quad (4.109)$$

$$q_2 = \frac{\lambda_0}{\pi} (\lambda_0^2 - A/B) (Q_1 e^{-Al/\lambda_0} - Q_2 e^{Al/\lambda_0}), \quad x = l, \quad (4.110)$$

$$q_2 = \frac{\lambda_0}{\pi} (\lambda_0^2 - A/B) (Q_1 e^{Al/\lambda_0} - Q_2 e^{-Al/\lambda_0}), \quad x = -l. \quad (4.111)$$

Перейдем к решению уравнения (4.108). Обозначим выражение под интегралом в (4.108) как функцию $\varphi(\lambda)$:

$$\varphi(\lambda) = \frac{f(\lambda)k(\lambda)(\lambda^2 - A/B)}{\Omega_0(\lambda)}, \quad f(v) = \frac{\varphi(v)\Omega_0(v)}{k(v)(v^2 - A/B)}, \quad (4.112)$$

тогда уравнение (4.108) перепишется в виде

$$-\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{A^2}{B v} \cdot \frac{\Omega_0(v)}{k(v)(v^2 - A/B)} \varphi(v) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda) d\lambda}{\lambda - v} = -q_1 v - \frac{q_2 v}{v^2 - \lambda_0^2}, \quad v \in \mathbb{R}. \quad (4.113)$$

Мы получили сингулярное интегральное уравнение вида (2.1), где функциям $a(v), b(v), \gamma(v)$ соответствуют выражения

$$\begin{aligned} a(v) &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{A^2}{B v} \frac{\Omega_0(v)}{k(v)(v^2 - A/B)}, \\ b(v) &= \frac{1}{2}, \\ \gamma(v) &= -q_1 v - \frac{q_2 v}{v^2 - \lambda_0^2}. \end{aligned}$$

Перейдем к решению уравнения (4.113).

Введем аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскостях $\mathbb{H}^{\pm}$ функции $\Phi^{\pm}(z)$ с помощью равенств:

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda) d\lambda}{\lambda - z}, \quad z \in \mathbb{H}^{\pm}, \quad (4.114)$$

и запишем формулы Сохоцкого:

$$\Phi(v) = \frac{1}{2} (\Phi^+(v) + \Phi^-(v)), \quad v \in \mathbb{R}, \quad (4.115)$$

$$\varphi(v) = \Phi^+(v) - \Phi^-(v), \quad v \in \mathbb{R}, \quad (4.116)$$

где следующий интеграл, напомним, понимается в смысле главного значения:

$$\Phi(v) = \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda) d\lambda}{\lambda - v} \quad v \in \mathbb{R},$$

а $\Phi^+(v)$ и $\Phi^-(v)$ соответствующие предельные значения функций (4.114) в точке $v \in \mathbb{R}$. Заметим, что для функции $\Omega_0(z)$, определяемой с помощью интеграла типа Коши (3.49), формулы Сохоцкого имеют вид:

$$\Omega_0(v) = \frac{1}{2} (\Omega^+(v) + \Omega^-(v)), \quad v \in \mathbb{R}, \quad (4.117)$$

$$\frac{B}{A^2} v k(v) \left(v^2 - \frac{A}{B} \right) = \frac{1}{2\pi i} (\Omega^-(v) - \Omega^+(v)), \quad v \in \mathbb{R}. \quad (4.118)$$

Подставив (4.115)–(4.118) в уравнение (4.113), получаем выражения для функций $G(v)$ и $g(v)$:

$$\begin{aligned} G(v) &= \frac{a(v) - b(v)}{a(v) + b(v)} = \frac{-\frac{1}{2\pi i} \frac{A^2}{Bv} \frac{\Omega_0(v)}{k(v)(v^2 - A/B)} - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2\pi i} \frac{A^2}{Bv} \frac{\Omega_0(v)}{k(v)(v^2 - A/B)} + \frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\Omega_0(v) + \pi i B / A^2 v k(v) (v^2 - A/B)}{\Omega_0(v) - \pi i B / A^2 v k(v) (v^2 - A/B)} = \frac{\Omega^-(v)}{\Omega^+(v)}, \\ g(v) &= \frac{\gamma(v)}{a(v) + b(v)} = \frac{\left(-q_1 v - \frac{q_2 v}{v^2 - \lambda_0^2} \right)}{-\frac{1}{2\pi i} \frac{A^2}{Bv} \frac{\Omega_0(v)}{k(v)(v^2 - A/B)} + \frac{1}{2}} = \left(q_1 v + \frac{q_2 v}{v^2 - \lambda_0^2} \right) \cdot \frac{\Omega^-(v) - \Omega^+(v)}{\Omega^+(v)}. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к следующей задаче Римана (см. также § 2, формулу (2.12)):

$$\Phi^+(v) = G(v) \Phi^-(v) + g(v), \quad v \in \mathbb{R}, \quad (4.119)$$

где коэффициент $G(v)$ и правая часть $g(v)$ определяются равенствами:

$$G(v) = \frac{\Omega^-(v)}{\Omega^+(v)}, \quad g(v) = \left(q_1 v + \frac{q_2 v}{v^2 - \lambda_0^2} \right) \cdot \frac{\Omega^-(v) - \Omega^+(v)}{\Omega^+(v)}, \quad v \in \mathbb{R}. \quad (4.120)$$

Отметим, что индекс задачи Римана (4.119) в данном случае отрицательный: $\text{Ind } G(t) = -2$.

Перейдем к решению задачи Римана (4.119), (4.120), решение которой будем искать в классе $\mathcal{H}_0$, см. опр. 8. Подставляя явно факторизованный коэффициент $G(v) = \Omega^-(v)/\Omega^+(v)$ и учитывая представление для $g(v)$ из (4.120), получаем из (4.119) следующее равенство:

$$\Omega^+(v) \left(\Phi^+(v) + q_1 v + \frac{q_2 v}{v^2 - \lambda_0^2} \right) = \Omega^-(v) \left(\Phi^-(v) + q_1 v + \frac{q_2 v}{v^2 - \lambda_0^2} \right). \quad (4.121)$$

Определим функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$, аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, с помощью равенства

$$F^\pm(z) = \Omega^\pm(z) \left(\Phi^\pm(z) + q_1 z + \frac{q_2 z}{z^2 - \lambda_0^2} \right), \quad z \in \mathbb{H}^\pm, \quad (4.122)$$

и заметим, что краевое условие (4.121) может быть записано в виде

$$F^+(v) = F^-(v), \quad v \in \mathbb{R}. \quad (4.123)$$

Таким образом, функция $F(z)$, определенная по формуле (4.122), является аналитической в открытой плоскости $\mathbb{C}$.

Применив обобщенную теорему Лиувилля (см. стр. 17), учитывая линейный рост $F^\pm(z)$ и условие (4.123), приходим к выводу, что функция $F(z)$ является многочленом первого порядка, т.е.

$$F(z) = c_0 + c_1 z, \quad (4.124)$$

где c_0 и c_1 — некоторые, вообще говоря, комплексные коэффициенты. Подставляя (4.124) в левую часть (4.122), находим

$$\Phi(z) = -q_1 z - \frac{q_2 z}{z^2 - \lambda_0^2} + \frac{c_1 z + c_0}{\Omega(z)}. \quad (4.125)$$

Значение функции $\Omega(z)$ на бесконечности равно константе Ω_∞ (см. теорему 3.6 § 3 гл. 3), а функции $\Phi^\pm(z)$ согласно (4.114) являются бесконечно малыми при $z \rightarrow \infty$. Чтобы удовлетворить этим условиям, константу c_1 следует положить

равной $q_1\Omega_\infty$, а учитывая поведение $\Phi(z)$ на бесконечности, константу c_0 следует считать равной нулю.

Корни функции $\Omega(z)$ не являются вещественными и выражение $v^2 - \lambda_0^2$ при $v \in \mathbb{R}$ не обращается в нуль. Однако при $z = \lambda_0$ функция $F(z)$, которая не должна иметь полюсов на всей комплексной плоскости, имеет особенности в слагаемых

$$-\frac{q_2 z}{z^2 - \lambda_0^2} + \frac{c_1 z}{\Omega(z)}.$$

Преобразуем дроби и устраним возможные полюсы с помощью значения константы q_2 . Первую дробь разложим на элементарные дроби

$$\frac{q_2 z}{z^2 - \lambda_0^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{q_2}{z - \lambda_0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{q_2}{z + \lambda_0}.$$

Если функция $\Omega(z)$ имеет корень первого порядка в точке λ_0 , то в окрестности этой точки справедливо разложение

$$\frac{c_1}{\Omega(z)} = \frac{c_1}{\Omega'(\lambda_0)(z - \lambda_0)} + o(1),$$

в таком случае

$$c_1 \lambda_0 = \frac{1}{2} \cdot \Omega'(\lambda_0) q_2.$$

Аналогичное требование к c_1 получается при устранении полюса в точке $z = -\lambda_0$. Это равенство должно выполняться и при $x = l$, и при $x = -l$. Можно сформулировать теорему.

Теорема 3.10. *Задача Римана (4.119), где коэффициент $G(v)$, имеющий индекс $\varkappa = -2$, равен*

$$G(v) = \frac{\Omega^-(v)}{\Omega^+(v)},$$

а свободный член равен

$$g(v) = \left(q_1 v + \frac{q_2 v}{v^2 - \lambda_0^2} \right) \cdot \frac{\Omega^-(v) - \Omega^+(v)}{\Omega^+(v)},$$

где q_1 и q_2 определяются формулами (4.109)–(4.111), разрешима в классе функций $\mathcal{H}_0$, если и только если выполняется условие

$$q_1 = \frac{\Omega'(\lambda_0)}{2\Omega_\infty} q_2,$$

при этом единственным решением является функция

$$\Phi(z) = q_1 \left(\frac{\Omega_\infty}{\Omega(z)} - z \left(1 + \frac{2\Omega_\infty}{\Omega'(\lambda_0)(z^2 - \lambda_0^2)} \right) \right), \quad (4.126)$$

где функция $\Omega(z)$ определяется формулой (3.14), λ_0 является нулем функции $\Omega(z)$, а значение Ω_∞ определяется формулой (3.20).

Учитывая (4.109)–(4.111), получаем представление для функции $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = \frac{AQ_0z}{\pi B} \left(\frac{1}{\Omega(z)} - \frac{2}{\Omega'(\lambda_0)(z^2 - \lambda_0^2)} - \frac{1}{\Omega_\infty} \right). \quad (4.127)$$

Возвращаемся к решению уравнения (4.113). Его решение $\varphi(v)$ связано с решением $\Phi^\pm(z)$ по формулам (4.116). Из этих формул и теоремы 3.10 вытекает следующее утверждение, устанавливающее вид функции $\varphi(v)$.

Теорема 3.11. *Предположим, что единственным нулем функции $\Omega^+(z)$, определенной по формуле (3.15), является точка $z = \lambda_0$ и аналогично единственным нулем $\Omega^-(z)$ является точка $z = -\lambda_0$, причем указанные нули функций $\Omega^\pm(z)$ простые. Тогда для разрешимости уравнения (4.113) необходимо и достаточно выполнение условия*

$$q_1 = \frac{\Omega'(\lambda_0)}{2\Omega_\infty} q_2,$$

при этом уравнение (4.113) имеет следующее единственное решение:

$$\varphi(v) = \frac{2iQ_0v^2k(v)(v^2 - A/B)}{A\Omega^+(v)\Omega^-(v)}. \quad (4.128)$$

Опираясь на формулы (4.103), (4.106) и рассуждая аналогично п. 4.1, получаем выражение для искомой функции $Q(v)$:

$$Q(v) = \frac{iQ_0v^2\Omega_0(v)}{\text{Ach}(Al/v)\Omega^+(v)\Omega^-(v)}. \quad (4.129)$$

Найдем неизвестные константы Q_0 , Q_1 и Q_2 . Из условий разрешимости задачи Римана (4.119), (4.120) следует равенство выражений (4.110) и (4.111), откуда следует равенство $Q_1 = -Q_2$:

$$Q_1e^{-Al/\lambda_0} - Q_2e^{Al/\lambda_0} = Q_1e^{Al/\lambda_0} - Q_2e^{-Al/\lambda_0} \Rightarrow Q_1 = -Q_2.$$

С учетом (4.109)–(4.110) получаем значения для Q_1 и Q_2 :

$$Q_1 = \frac{AQ_0}{B\Omega'(\lambda_0)\text{ch}(Al/\lambda_0)(\lambda_0^2 - A/B)}, \quad (4.130)$$

$$Q_2 = -\frac{AQ_0}{B\Omega'(\lambda_0)\text{ch}(Al/\lambda_0)(\lambda_0^2 - A/B)}. \quad (4.131)$$

Далее с помощью представления (4.100) для $\mathcal{E}(x)$ и краевого условия (4.98) $\mathcal{E}(l) = 1$ найдем значение константы Q_0 (условие $\mathcal{E}(-l) = 1$ дает тот же результат):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(l) &= \frac{Q_0}{\Omega_\infty} - 2Q_1\lambda_0\frac{B}{A}\text{ch}\left(\frac{Al}{\lambda_0}\right) + \frac{B}{iA}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Q(\lambda)k(\lambda)e^{-Al/\lambda}d\lambda}{\Omega_0(\lambda)} = \\ &= \frac{Q_0}{\Omega_\infty} - \frac{AQ_0B\lambda_02\text{ch}(Al/\lambda_0)}{B\Omega'(\lambda_0)\text{ch}(Al/\lambda_0)(\lambda_0^2 - A/B)A} + \\ &+ \frac{BiQ_0}{iA^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda^2k(\lambda)\Omega_0(\lambda)e^{-Al/\lambda}d\lambda}{\text{ch}(Al/\lambda)\Omega^+(\lambda)\Omega^-(\lambda)\Omega_0(\lambda)} = \\ &= Q_0\left(\frac{1}{\Omega_\infty} - \frac{2\lambda_0}{\Omega'(\lambda_0)(\lambda_0^2 - A/B)} + \frac{B}{A^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda^2k(\lambda)d\lambda}{\Omega^+(\lambda)\Omega^-(\lambda)}\right). \end{aligned}$$

$$Q_0 = \left(\frac{1}{\Omega_\infty} - \frac{2\lambda_0}{\Omega'(\lambda_0)(\lambda_0^2 - A/B)} + \frac{B}{A^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda^2k(\lambda)d\lambda}{\Omega^+(\lambda)\Omega^-(\lambda)}\right)^{-1}. \quad (4.132)$$

Можно сформулировать теорему.

Теорема 3.12. *Решением краевой задачи (3.1)–(3.8), стр. 56, в случае, когда дисперсионная функция $\Omega(z)$ (3.14) имеет два простых корня, равных $\pm\lambda_0$, являются функции $\mathcal{F}(x, v)$ и $\mathcal{E}(x)$, представленные в виде*

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{F}(x, v) &= Q_0\left(\frac{v}{A\Omega_\infty} - \frac{\lambda_0\mathfrak{K}(\lambda_0, v)e^{-Ax/\lambda_0} - \lambda_0\mathfrak{K}(-\lambda_0, v)e^{Ax/\lambda_0}}{\Omega'(\lambda_0)\text{ch}(Al/\lambda_0)(\lambda_0^2 - A/B)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B}{A^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda^2k(\lambda)\mathfrak{K}(\lambda, v)e^{-Ax/\lambda}d\lambda}{\text{ch}(Al/\lambda)\Omega^+(\lambda)\Omega^-(\lambda)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{v\Omega_0(v)e^{-Ax/v}}{A\text{ch}(Al/v)\Omega^+(v)\Omega^-(v)}\right), \end{aligned} \right. \quad (4.133)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{E}(x) &= Q_0\left(\frac{1}{\Omega_\infty} - \frac{2\lambda_0\text{ch}(Ax/\lambda_0)}{\Omega'(\lambda_0)\text{ch}(Al/\lambda_0)(\lambda_0^2 - A/B)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B}{A^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda^2k(\lambda)e^{-Ax/\lambda}d\lambda}{\text{ch}(Al/\lambda)\Omega^+(\lambda)\Omega^-(\lambda)}\right). \end{aligned} \right. \quad (4.134)$$

где функции $\Omega(\lambda)$, $\Omega_0(\lambda)$ и $\varkappa(\lambda, v)$ определены соответственно формулами (3.14), (3.17) и (4.59), а функция $Q(v)$ и константа Q_0 вычисляются с помощью выражений (4.129) и (4.132) соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вывод указанных формул произведен перед формулировкой теоремы. Докажем, что функция $Q(v)$ такова, что произведение $Q(v)k(v)$ принадлежит классу функций $\mathfrak{G}_0$, а выражение $Q(v)/(-iv)$ принимает конечное значение при всех допустимых значениях параметра v .

Напомним, что функция $g_0(\mu)$ принадлежит классу $\mathfrak{G}_0$, если она определена и ограничена при всех $\mu \in (-\infty, \infty)$ и является бесконечно малой при $\mu \rightarrow \infty$ и при $\mu \rightarrow 0$, причем в нуле $g_0(\mu) = \mathcal{O}(e^{-c|A/\mu|})$, а при $\mu \rightarrow \infty$ она убывает быстрее любой степени аргумента, т.е. $g_0(\mu) = o(1/\mu^k)$.

Согласно (4.90)

$$Q(v) = \frac{iQ_0v^2\Omega_0(v)}{\text{Ach}(Al/v)\Omega^+(v)\Omega^-(v)}.$$

То есть выражение $Q(v)/(-iv)$ равно

$$\frac{Q(v)}{-iv} = -\frac{Q_0v\Omega_0(v)}{\text{Ach}(Al/v)\Omega^+(v)\Omega^-(v)},$$

при $v \in (-\infty, +\infty)$ указанное выражение ограничено, при $v \rightarrow \pm\infty$ оно равно $\mathcal{O}(v)$. Это позволяет утверждать, что при всех конечных значениях параметра v существует конечное значение у выражения $Q(v)/(-iv)$.

Произведение $Q(v)k(v)$ равно

$$Q(v)k(v) = \frac{iQ_0v^2\Omega_0(v)k(v)}{\text{Ach}(Al/v)\Omega^+(v)\Omega^-(v)}.$$

Учитывая свойства функции $\Omega(v)$ (см. § 3 гл. 3) и принадлежность функции $k(v)$ классу $\mathfrak{K}$, можно утверждать, что произведение $Q(v)k(v)$ принадлежит классу $\mathfrak{G}_0$.

Теорема доказана.

Глава 4. Численная реализация аналитического решения для электрического поля

§1. Алгоритм вычисления

В данной главе представлена численная реализация построенного аналитического решения для электрического поля $\mathcal{E}(x)$, исследованы свойства решения в зависимости от параметров задачи. Далее на графиках нам удобно будет обозначать ее $E(x)$. Напомним выражение для $E(x)$:

$$E(x) = Q_0 \left(\frac{1}{\Omega_\infty} - \frac{2\lambda_0 \operatorname{ch}(Ax/\lambda_0)}{\Omega'(\lambda_0) \operatorname{ch}(Al/\lambda_0)(\lambda_0^2 - A/B)} + \frac{B}{A^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 k(\lambda) e^{-Ax/\lambda} d\lambda}{\operatorname{ch}(Al/\lambda) \Omega^+(\lambda) \Omega^-(\lambda)} \right). \quad (1.1)$$

Как видно из формулы (1.1), напряженность можно представить в виде суммы

$$E(x) = E_a(x) + E_b(x) + E_c(x).$$

Величина E_a является константой, поэтому отдельно графики для E_a не приводятся. Величина $E_b(x)$ представляет из себя гиперболический косинус, третье слагаемое $E_c(x)$ выражается через интеграл и имеет сложный характер.

В выражении (1.1) параметрами для функции $E(x)$ являются константы A , B и функция $k(s)$, которые, в свою очередь, связаны с физическими характеристиками среды — частотой столкновений ν , частотой внешнего поля ω и безразмерным химическим потенциалом α . Выше в § 3 главы 3 была показана зависимость нулей дисперсионной функции от частоты внешнего поля ω . В настоящей главе приводятся результаты вычисления $E(x)$ по формуле (1.1), показывающие зависимость амплитуды самосогласованного электрического поля от величин ν , ω и α . В § 2 и § 3 рассмотрены случаи максвелловской и вырожденной плазмы соответственно.

Для вычисления $E(x)$ по формуле (1.1) выполняются следующие действия: сначала для заданных параметров плазмы ω и ν определяются значения констант A и B по формулам (3.16), (4.16) из гл. 1, затем находится значение корня

$\lambda_0 \in \mathbb{H}^-$ дисперсионной функции $\Omega(\lambda)$ из уравнения

$$\Omega(\lambda, A, B) = 0.$$

Для решения этого уравнения применяется итерационная процедура Ньютона [11], которая заключается в использовании уравнения, связывающего значение функции и ее производной:

$$\lambda_0^{(n+1)} = \lambda_0^{(n)} - \frac{\Omega(\lambda_0^{(n)}, A, B)}{\Omega'(\lambda_0^{(n)}, A, B)}.$$

Значение производной вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \Omega'(\lambda, A, B) = & -\frac{2B}{A^2}\lambda + \frac{1}{A} \left(1 - \frac{3B}{A}\lambda^2\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(s)ds}{s - \lambda} + \\ & + \frac{1}{A} \left(\lambda - \frac{B}{A}\lambda^3\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(s)ds}{(s - \lambda)^2}, \quad \text{Im } \lambda \neq 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для вычисления интегралов в функциях $\Omega(\lambda_0^{(n)}, A, B)$ и $\Omega'(\lambda_0^{(n)}, A, B)$ применяются квадратурные формулы Гаусса 10-го порядка [11].

Отметим, что метод Ньютона применим, если начальное приближение $\lambda_0^{(1)}$ попадает в достаточно малую окрестность предполагаемого корня, поэтому начальное приближение находится с помощью асимптотических оценок.

После нахождения значения λ_0 можно вычислить значения константы Q_0 по формуле

$$Q_0 = \left(\frac{1}{\Lambda_\infty} - \frac{2\lambda_0}{\Omega'(\lambda_0)(\lambda_0^2 - A/B)} + \frac{B}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2 k(\lambda) d\lambda}{\Omega^+(\lambda)\Omega^-(\lambda)} \right)^{-1} \quad (1.3)$$

и приступить к вычислению выражения (1.1).

При вычислении константы Q_0 , как и при вычислении $E_c(x)$, необходимо найти значения функций $\Omega^\pm(\lambda)$ на вещественной оси. Эти значения вычисляются с помощью выражения для $\Omega_0(\lambda)$, которое дается формулой (3.49) из главы 2, и формул Сохоцкого [84]:

$$\Omega^\pm(\lambda) = \Omega_0(\lambda) \mp \pi i \frac{B}{A^2} \lambda \left(\lambda^2 - \frac{A}{B} \right) k(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Выражение для функции $\Omega_0(\lambda)$ содержит интеграл в смысле главного значения

$$I(\lambda) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(s)}{s - \lambda} ds,$$

вычисление которого имеет свои особенности, что подробно разобрано в следующих параграфах.

§2. Случай невырожденной плазмы

В данном параграфе рассматривается случай, когда в невозмущенном состоянии плазма описывается функцией Максвелла. Тогда функция $k(s)$ и параметры A и B в формулах (1.1)–(1.4) имеют вид, см. формулы (4.13), (4.16) из гл. 1, стр. 31:

$$k(s) = \frac{e^{-s^2}}{\sqrt{\pi}}, \quad A = 1 - \frac{i\omega}{\nu}, \quad B = \frac{2\omega_p^2}{\nu^2}, \quad (2.1)$$

где ω_p — плазменная частота.

2.1. Представление для сингулярного интеграла $I(\lambda)$.

Простота функции $k(s)$ позволяет записать интеграл, который требуется вычислить

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-s^2} ds}{s - x}, \quad (2.2)$$

в другой форме, более удобной для вычисления. Введем функцию, зависящую от переменной u :

$$f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-us^2} ds}{s - x}, \quad (2.3)$$

очевидно, что при $u = 1$ эта функция совпадает с интегралом (2.2).

Продифференцируем $f(u)$ по переменной u :

$$\begin{aligned}
f'(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-s^2 e^{-us^2}}{s-x} ds = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(s^2 - x^2)e^{-us^2} + x^2 e^{-us^2}}{s-x} ds = \\
&= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(s-x)(s+x)e^{-us^2}}{s-x} ds - x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-us^2}}{s-x} ds = \\
&= - \int_{-\infty}^{+\infty} (s+x)e^{-us^2} ds - x^2 f(u) = \\
&= - \int_{-\infty}^{+\infty} s e^{-us^2} ds - x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-us^2} ds - x^2 f(u) = \\
&= \frac{1}{2u} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-us^2} d(-us^2) - \frac{x}{\sqrt{u}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-us^2} d(\sqrt{u}s) - x^2 f(u) = \\
&= 0 - \frac{x}{\sqrt{u}} \sqrt{\pi} - x^2 f(u).
\end{aligned}$$

Получаем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $f(u)$:

$$f'(u) + x^2 f(u) = -\frac{x}{\sqrt{u}} \sqrt{\pi}. \quad (2.4)$$

Решая соответствующее однородное уравнение, получаем решение

$$f(u) = C e^{-x^2 u}. \quad (2.5)$$

Применяя метод вариации постоянных, получаем уравнение для C'

$$C'(u) = -\frac{x}{\sqrt{u}} \sqrt{\pi} e^{x^2 u}, \quad (2.6)$$

откуда

$$C(u) = - \int_0^u \frac{x}{\sqrt{w}} \sqrt{\pi} e^{x^2 w} dw = -2x\sqrt{\pi} \int_0^u e^{x^2 w} d\sqrt{w} = -2x\sqrt{\pi} \int_0^{u^2} e^{x^2 t^2} dt, \quad (2.7)$$

а сама функция $f(u)$ выражается формулой

$$f(u) = -2x\sqrt{\pi} e^{-x^2 u} \int_0^{u^2} e^{x^2 t^2} dt. \quad (2.8)$$

Вспоминая, что при $u = 1$ функция совпадает с интегралом (2.2), т.е. $f(1) = I(x)$, получаем удобную формулу для его вычисления

$$I(x) = -2x\sqrt{\pi} \int_0^1 e^{x^2(t^2-1)} dt. \quad (2.9)$$

Отметим, что этот интеграл может быть также выражен через функцию ошибок [1]. Для вычисления будем использовать формулу (2.9), к которой применяем квадратурные формулы Гаусса.

2.2. Результаты расчетов при $\nu = 0.001\omega_p$. В данном разделе на графиках представлена зависимость величин $E_b(x)$, $E_c(x)$ и суммарной величины амплитуды самосогласованного поля $E(x)$ от координаты x при различных значениях частоты внешнего поля (от 0,1 до 1,5 плазменной частоты ω_p) при частоте столкновений $\nu = 0.001\omega_p$ для невырожденной плазмы. На всех рисунках синим цветом изображена вещественная часть, красным — мнимая.

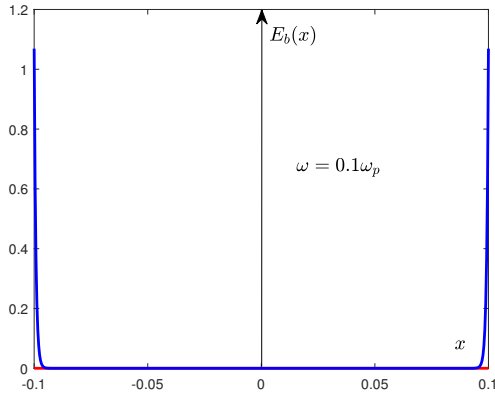


Рис. 4.1. Величина $E_b(x)$ при $\omega = 0.1\omega_p$.

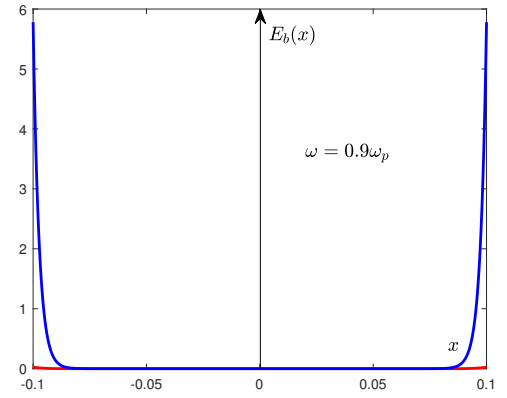


Рис. 4.2. Величина $E_b(x)$ при $\omega = 0.9\omega_p$.

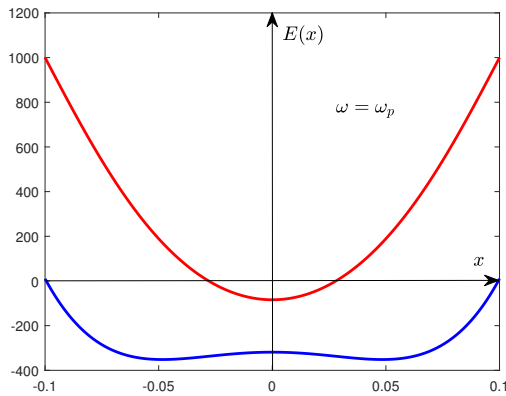


Рис. 4.3. Величина $E_b(x)$ при $\omega = \omega_p$.

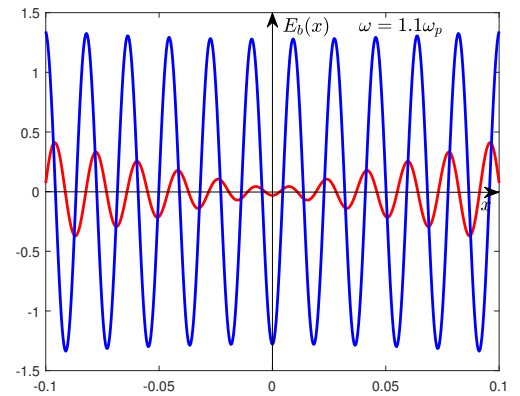


Рис. 4.4. Величина $E_b(x)$ при $\omega = 1.1\omega_p$.

На рис. 4.1 – 4.4 изображены моды $E_b(x)$ при значениях ω от 0.1 до 1.1 от ω_p .

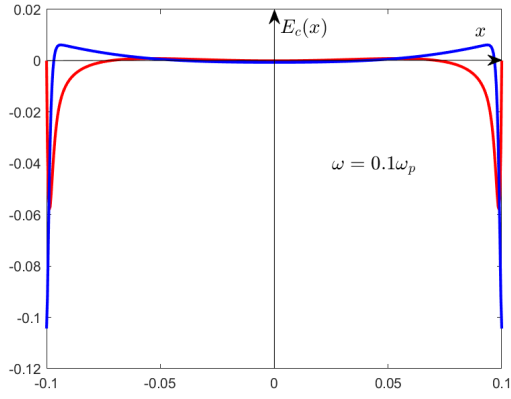


Рис. 4.5. Величина $E_c(x)$ при $\omega = 0.1\omega_p$.

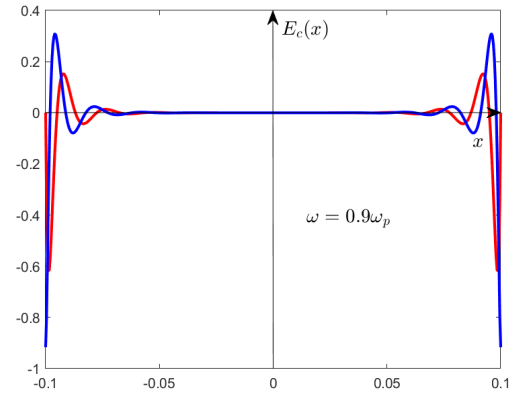


Рис. 4.6. Величина $E_c(x)$ при $\omega = 0.9\omega_p$.

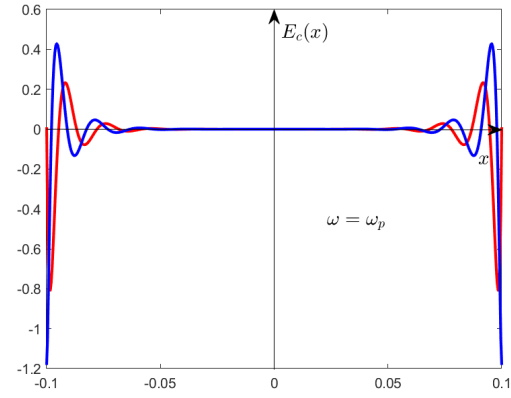


Рис. 4.7. Величина $E_c(x)$ при $\omega = \omega_p$.

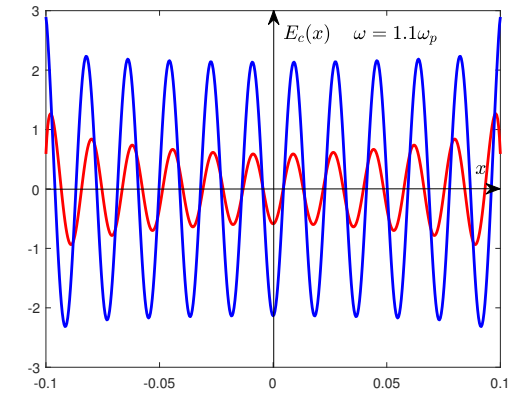


Рис. 4.8. Величина $E_c(x)$ при $\omega = 1.1\omega_p$.

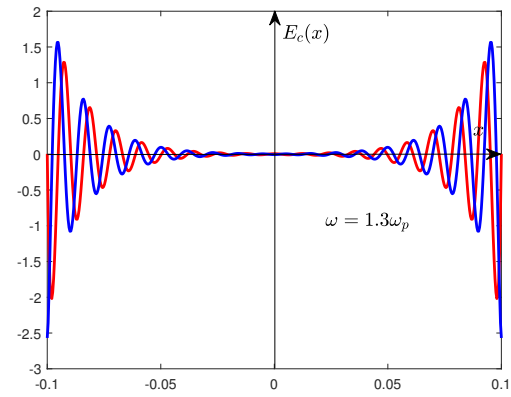


Рис. 4.9. Величина $E_c(x)$ при $\omega = 1.3\omega_p$.

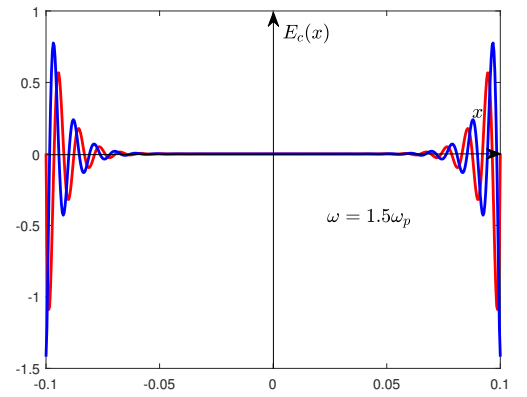


Рис. 4.10. Величина $E_c(x)$ при $\omega = 1.5\omega_p$.

На рис. 4.5 – 4.10 изображены моды $E_c(x)$ при значениях ω от 0.1 до 1.5 от ω_p .
 На рис. 4.11 – 4.16 изображены графики напряженности $E(x)$, т.е. сумма всех

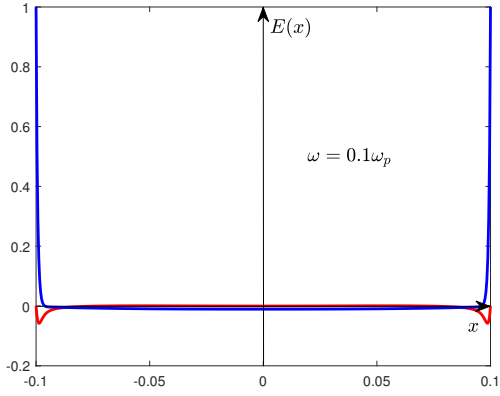


Рис. 4.11. Величина $E(x)$ при $\omega = 0.1\omega_p$.

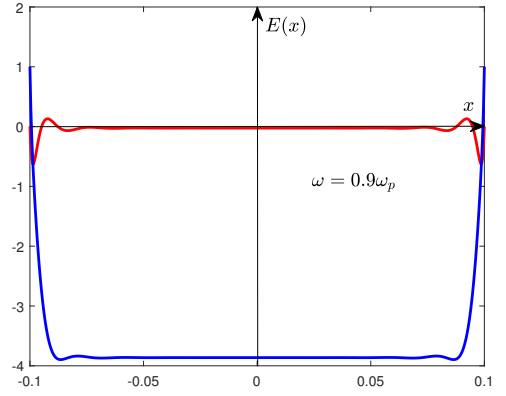


Рис. 4.12. Величина $E(x)$ при $\omega = 0.9\omega_p$.

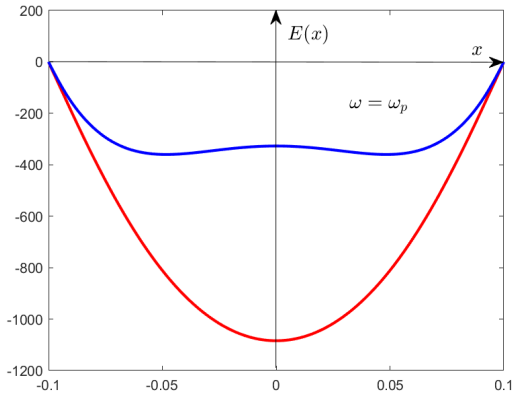


Рис. 4.13. Величина $E(x)$ при $\omega = \omega_p$.

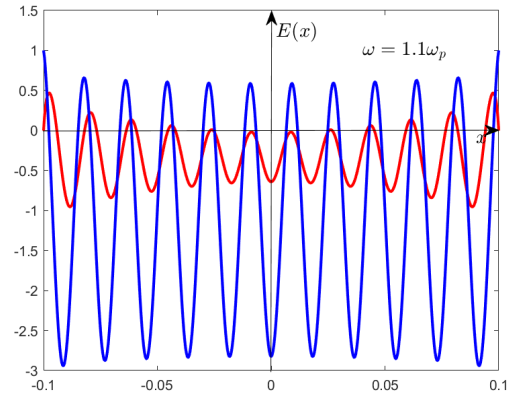


Рис. 4.14. Величина $E(x)$ при $\omega = 1.1\omega_p$.

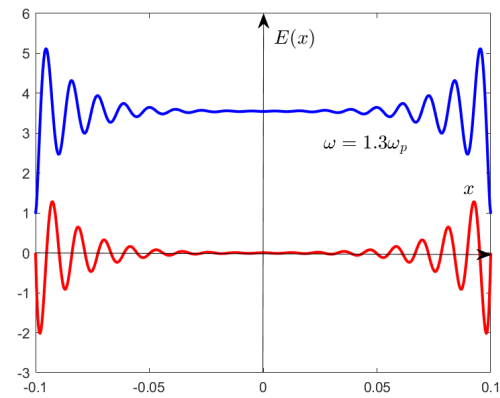


Рис. 4.15. Величина $E(x)$ при $\omega = 1.3\omega_p$.

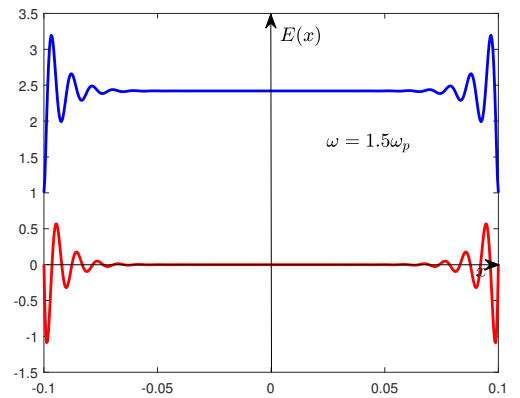


Рис. 4.16. Величина $E(x)$ при $\omega = 1.5\omega_p$.

слагаемых $E_a(x) + E_b(x) + E_c(x)$.

2.3. Результаты расчетов при $\nu = 0.005\omega_p$. В данном разделе покажем зависимость $E(x)$ при $\nu = 0.005\omega_p$. Вообще говоря, для физической модели для максвелловской плазмы естественнее будет уменьшение числа ν , но тогда графики потеряют наглядность, поэтому для демонстрации зависимости величины амплитуды самосогласованного поля от частоты столкновений взяли некоторое модельное значение. Результаты, показанные на рис. 4.17, 4.18, можно сравнить

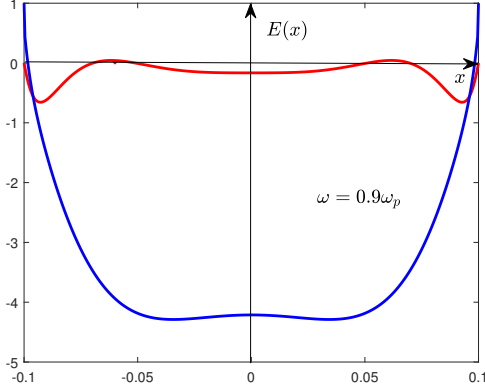


Рис. 4.17. $E(x)$ при $\omega = 0.9\omega_p$.

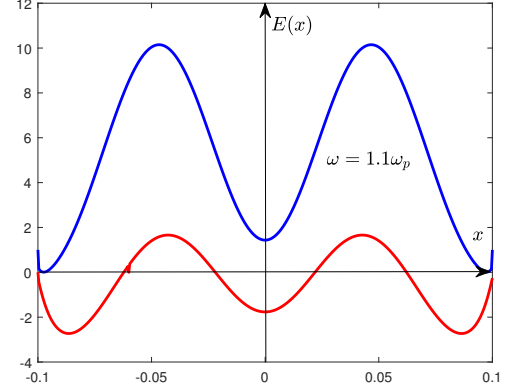


Рис. 4.18. $E(x)$ при $\omega = 1.1\omega_p$.

с результатами на рис. 4.12, 4.14, сделанными при тех же частотах внешнего поля. С ростом значения ν наблюдается увеличение пограничного слоя и увеличение периода осцилляций по координате.

2.4. Свойства $\mathcal{E}(x)$, вытекающие из численных результатов.

В результате проведенных вычислений можно сделать следующие наблюдения:

1) При малых значениях частоты внешнего поля оно почти полностью экранируется и не проникает в плазму. Самый большой вклад в $E(x)$ дает слагаемое $E_b(x)$, выражающееся через гиперболический косинус, величина $E_b(x)$ резко убывает при удалении от границы слоя. При малых частотах вклад слагаемых E_a и $E_c(x)$ очень мал.

2) При увеличении частоты внешнего поля растет модуль постоянной составляющей E_a .

3) Вклад слагаемого $E_c(x)$, который при низких частотах составляет доли

процента, с увеличением частоты увеличивается и достигает десятков процентов.

4) При частоте внешнего поля, близкой к плазменной, т.е. при значениях $\omega = \omega_p$ возникает резонанс, абсолютная величина самосогласованного поля на порядок больше граничного условия.

5) При частотах, незначительно превышающих плазменную, возникают пространственные структуры (осцилляции по координате), которые потом с ростом частоты исчезают.

6) Почти при всех значениях частот (кроме плазменной) явно выражен приграничный слой, размер которого увеличивается при приближении частоты к значению ω_p и уменьшается при дальнейшем росте частоты. Резкое убывание поля при удалении от границы для частот, меньших ω_p , объясняется характером поведения гиперболического косинуса в выражении для $E_b(x)$. При дальнейшем росте частоты при достижении величины ω^* слагаемое $E_b(x)$ отсутствует, т.к. у дисперсионной функции нет корней при таких параметрах. Но приграничный эффект присутствует и объясняется поведением интегрального слагаемого $E_c(x)$.

7) Если продолжается рост частоты ω (выше плазменной), то эффект от резонанса снижается, абсолютная величина самосогласованного поля уменьшается, приближаясь к граничному условию. При частотах, превышающих плазменную, внешнее электрическое поле “проходит” через плазменный слой, что соответствует теоретическим данным [2, 94].

8) При изменении значения ν поведение $E(x)$ сохраняет качественные характеристики. Но можно заметить, что с увеличением ν увеличивается пограничный слой и уменьшается число осцилляций по координате.

§3. Случай вырожденной плазмы

В данном параграфе рассматривается случай, когда в невозмущенном состоянии плазма описывается функцией Ферми — Дирака с произвольным химическим

потенциалом $\mu \in (0, +\infty)$, см. формулу (3.3) из гл. 1, и справедливы формулы (3.7), (3.13), (3.16), стр. 27. Тогда функция $k(s)$ в формулах (1.1)–(1.4) имеет вид:

$$k(s) = \frac{1}{2m_0(\alpha)(e^{s^2-\alpha} + 1)}, \quad m_0(\alpha) = \int_0^\infty \frac{ds}{e^{s^2-\alpha} + 1}, \quad (3.1)$$

где параметр $\alpha \in (0, +\infty)$. Напомним выражения для параметров А и В:

$$A = 1 - \frac{i\omega}{\nu}, \quad B = \frac{\omega_p^2 m_0(\alpha)}{\nu^2 m_2(\alpha)}, \quad m_2(\alpha) = \int_0^\infty \frac{s^2 ds}{e^{s^2-\alpha} + 1}. \quad (3.2)$$

3.1. Представление для сингулярного интеграла $I(\lambda)$.

Требуется вычислить интеграл

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{(1 + e^{s^2-\alpha})(s - x)}, \quad (3.3)$$

который является сингулярным и прямыми методами вычисляется с большой погрешностью. Для устранения сингулярности воспользуемся способом из книги [95] и проведем некоторые преобразования. Обозначим плотность через $\rho(s)$,

$$\rho(s) = \frac{1}{1 + e^{s^2-\alpha}}, \quad (3.4)$$

добавим и вычтем значение $\rho(x)$:

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(x) + \rho(s) - \rho(x)}{s - x} ds = \rho(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{s - x} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(s) - \rho(x)}{s - x} ds,$$

первый интеграл равен нулю, а второй интеграл является регулярным. Преобразуем подынтегральное выражение. Сначала приведем разность $\rho(s) - \rho(x)$ к общему знаменателю, потом вынесем за скобки нужные степени экспонент.

$$\begin{aligned} \rho(s) - \rho(x) &= \frac{1}{1 + e^{s^2-\alpha}} - \frac{1}{1 + e^{x^2-\alpha}} = \frac{e^{x^2-\alpha} - e^{s^2-\alpha}}{(1 + e^{s^2-\alpha})(1 + e^{x^2-\alpha})} = \\ &= \frac{e^{-\alpha}(e^{x^2} - e^{s^2})}{e^{-\alpha}(e^{\alpha/2} + e^{s^2-\alpha/2})(e^{\alpha/2} + e^{x^2-\alpha/2})} = \frac{e^{x^2} - e^{s^2}}{(e^{\alpha/2} + e^{s^2-\alpha/2})(e^{\alpha/2} + e^{x^2-\alpha/2})} = \\ &= \frac{e^{\frac{x^2+s^2}{2}}(e^{\frac{x^2-s^2}{2}} - e^{\frac{s^2-x^2}{2}})}{e^{\frac{x^2+s^2}{2}}(e^{\frac{\alpha-s^2}{2}} + e^{\frac{s^2-\alpha}{2}})(e^{\frac{\alpha-x^2}{2}} + e^{\frac{x^2-\alpha}{2}})} = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x^2-s^2}{2}\right)}{2\operatorname{ch}\left(\frac{s^2-\alpha}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x^2-\alpha}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Теперь можно записать интеграл (3.3) в более удобной для вычисления форме. При приближении s к x в числителе и знаменателе возникают величины одинакового порядка малости.

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sh} \left(\frac{x^2 - s^2}{2} \right) ds}{2 \text{ch} \left(\frac{s^2 - \alpha}{2} \right) \text{ch} \left(\frac{x^2 - \alpha}{2} \right) (s - x)}. \quad (3.5)$$

Подынтегральная функция в (3.5) непрерывна, включая $s = x$. Полученный интеграл вычисляется с помощью квадратурных формул Гаусса 10-го порядка.

3.2. Результаты расчетов при $\alpha = 2$ и $\nu = 0.001\omega_p$. В данном разделе исследуется характер зависимости $E_b(x)$, $E_c(x)$ и $E(x)$ от координаты при различных значениях частоты внешнего поля, частоты столкновений и значений химического потенциала. Как и в предыдущем параграфе на всех рисунках синим цветом изображена вещественная часть, красным — мнимая.

Сначала рассмотрим графики, полученные при частоте столкновений $\nu = 0.001\omega_p$ и химическом потенциале $\alpha = 2$ (слабо вырожденная плазма). На

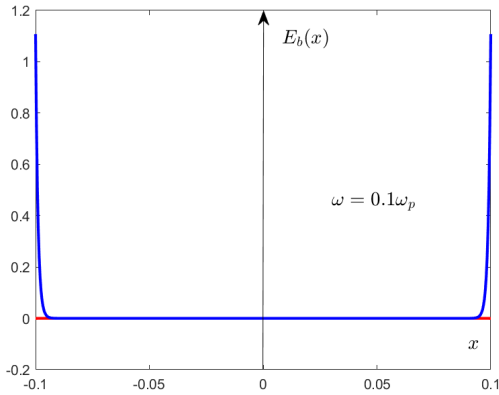


Рис. 4.19. Величина $E_b(x)$ при $\omega = 0.1\omega_p$.

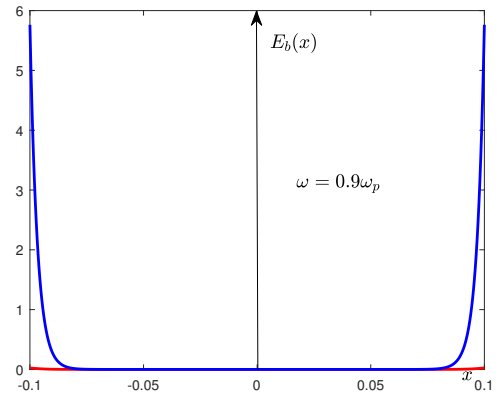


Рис. 4.20. Величина $E_b(x)$ при $\omega = 0.9\omega_p$.

рисунках 4.19–4.22 показана зависимость моды $E_b(x)$, на рисунках 4.23–4.26 — моды $E_c(x)$, на рисунках 4.27–4.30 всей суммы $E(x)$. Из сравнения рисунков 4.1–4.14 с рисунками 4.19–4.30 видно, что результат для слабовырожденной плазмы почти не отличается от результатов предыдущего параграфа для невырожденной плазмы. Явно выражен пограничный слой при малых частотах, т.е. про-

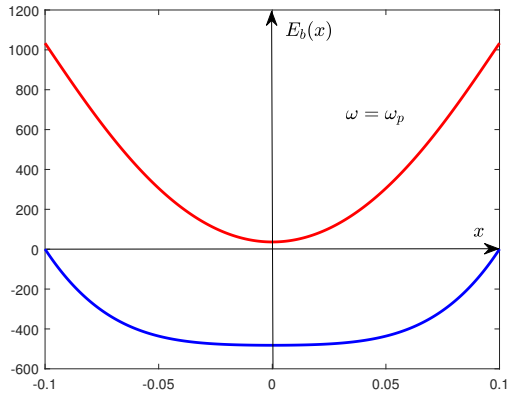


Рис. 4.21. Величина $E_b(x)$ при $\omega = \omega_p$.

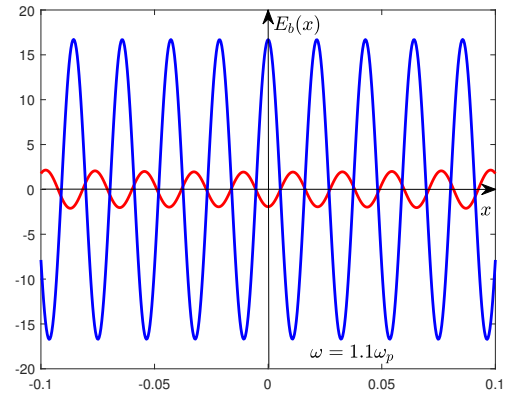


Рис. 4.22. Величина $E_b(x)$ при $\omega = 1.1\omega_p$.

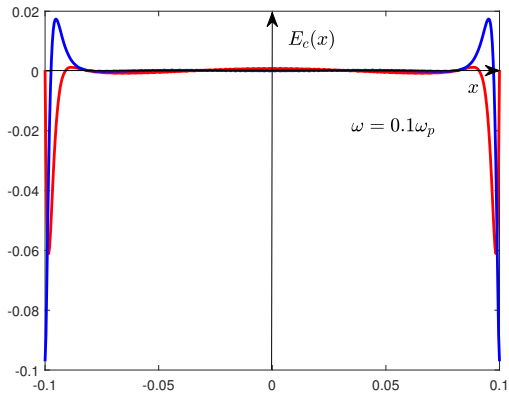


Рис. 4.23. Величина $E_c(x)$ при $\omega = 0.1\omega_p$.

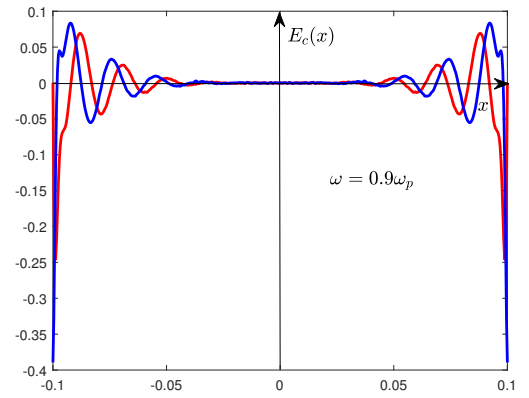


Рис. 4.24. Величина $E_c(x)$ при $\omega = 0.9\omega_p$.

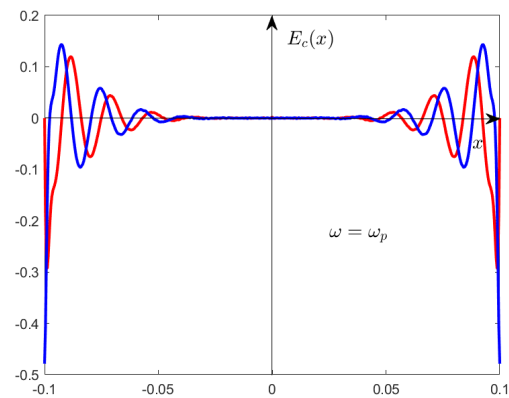


Рис. 4.25. Величина $E_c(x)$ при $\omega = \omega_p$.

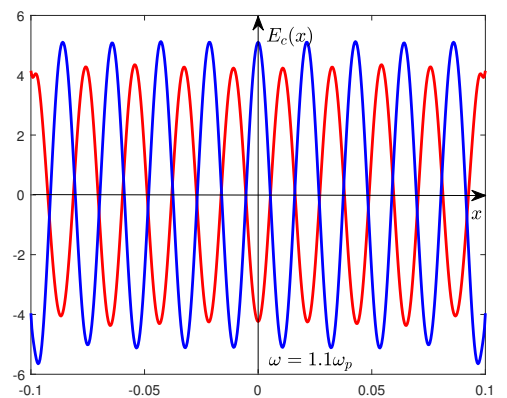


Рис. 4.26. Величина $E_c(x)$ при $\omega = 1.1\omega_p$.

исходит экранирование поля, наблюдается резонанс при плазменной частоте и осцилляции по координате при частоте $\omega = 1.1\omega_p$.

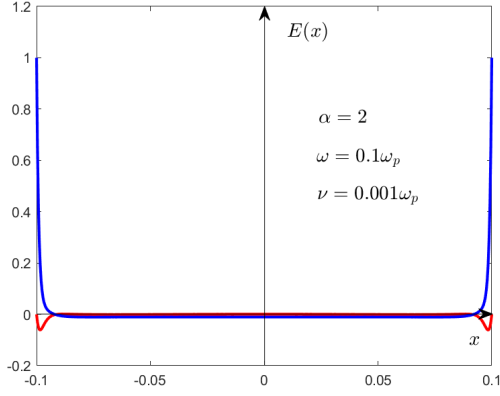


Рис. 4.27. Величина $E(x)$ при $\omega = 0.1\omega_p$.

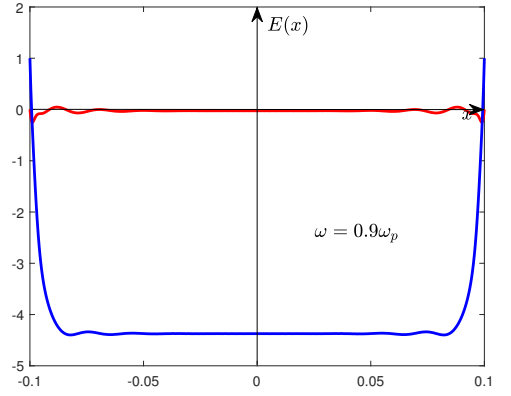


Рис. 4.28. Величина $E(x)$ при $\omega = 0.9\omega_p$.

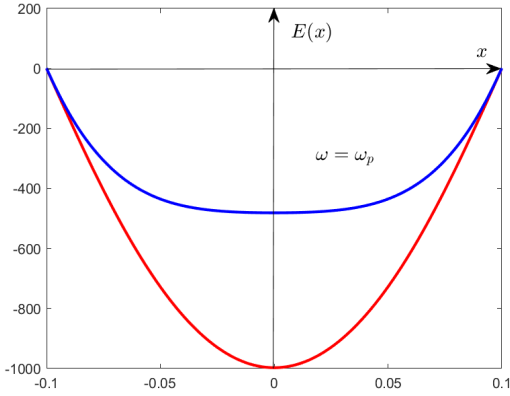


Рис. 4.29. Величина $E(x)$ при $\omega = \omega_p$.

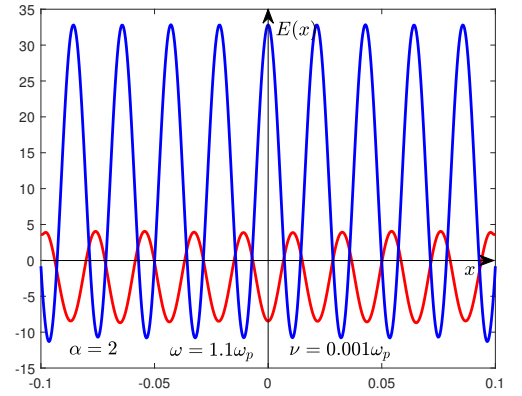


Рис. 4.30. Величина $E(x)$ при $\omega = 1.1\omega_p$.

3.3. Результаты расчетов при $\alpha = 5$ и $\alpha = 10$. Сравнение результатов расчетов при разных значениях химического потенциала α показывает, что качественное поведение графиков совпадает, отличаются только количественные характеристики. Чтобы не перегружать работу большим количеством рисунков, приведем самые необходимые для сравнения. В данном разделе рассмотрим и сравним графики, полученные при частоте столкновений $\nu = 0.001\omega_p$ и значениях $\alpha = 5$ и $\alpha = 10$.

Сравнение результатов, показанных на рис. 4.27–4.30 для плазмы с коэффициентом вырождения $\alpha = 2$, а также на рис. 4.31–4.36 для α , равном 5 и 10, показывает, что максимальные значения напряженности $E(x)$ для разных α будут одного порядка, но с ростом химического потенциала величина погранично-

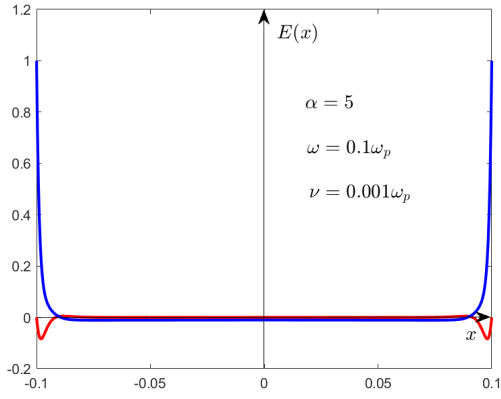


Рис. 4.31. $E(x)$ при $\omega = 0.1\omega_p$, $\alpha = 5$.

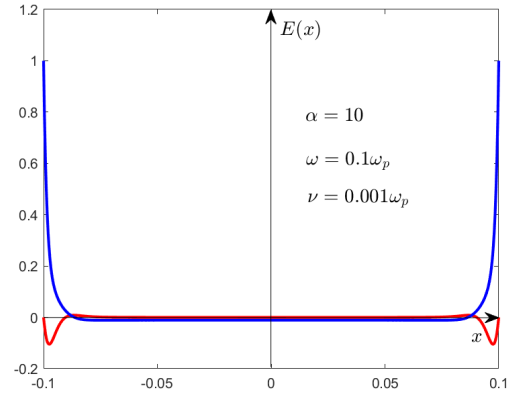


Рис. 4.32. $E(x)$ при $\omega = 0.1\omega_p$, $\alpha = 10$.

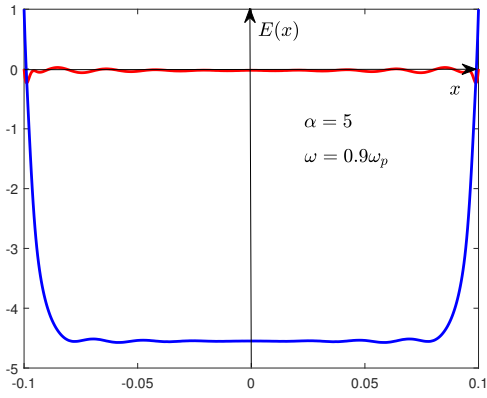


Рис. 4.33. $E(x)$ при $\omega = 0.9\omega_p$, $\alpha = 5$.

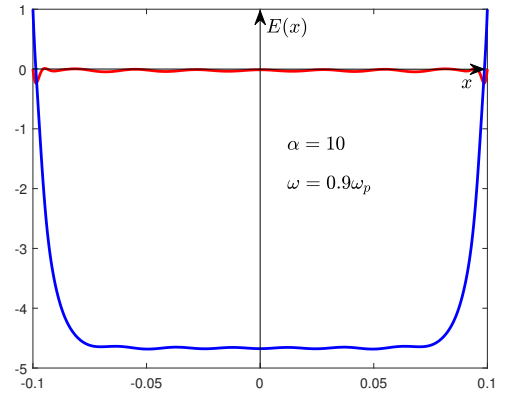


Рис. 4.34. $E(x)$ при $\omega = 0.9\omega_p$, $\alpha = 10$.

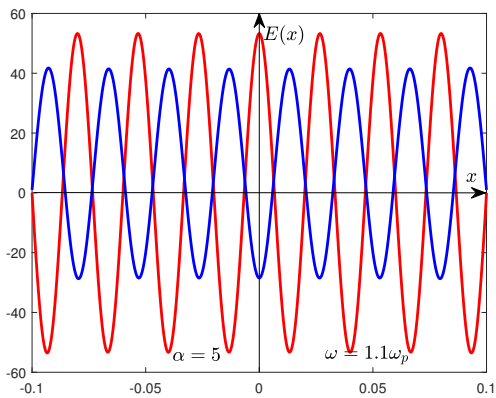


Рис. 4.35. $E(x)$ при $\omega = 1.1\omega_p$, $\alpha = 5$.

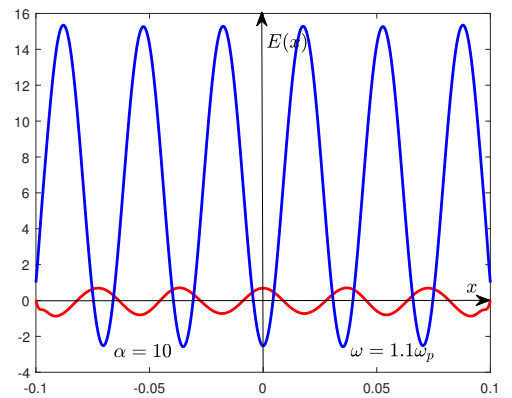


Рис. 4.36. $E(x)$ при $\omega = 1.1\omega_p$, $\alpha = 10$.

го слоя увеличивается, а количество осцилляций, наблюдаемых при $\omega = 1.1\omega_p$, уменьшается.

3.4. Результаты расчетов при $\nu = 0.01\omega_p$. В данном разделе рассмотрим, как влияет на характер графиков изменение частоты столкновений в 10 раз.

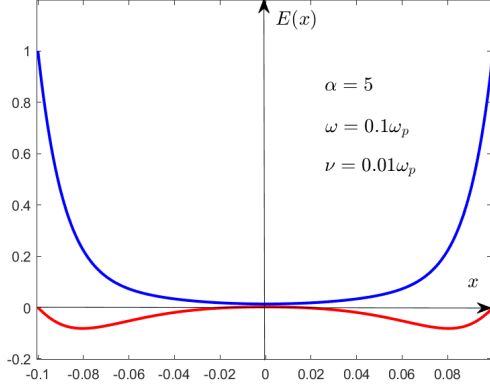


Рис. 4.37. $E(x)$ при $\omega = 0.1\omega_p$, $\alpha = 5$.

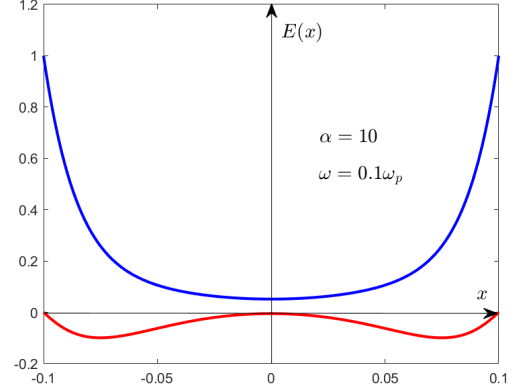


Рис. 4.38. $E(x)$ при $\omega = 0.1\omega_p$, $\alpha = 10$.

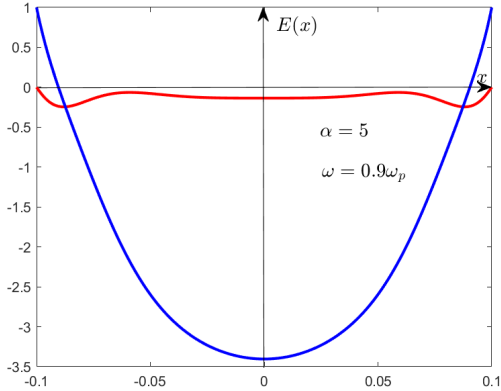


Рис. 4.39. $E(x)$ при $\omega = 0.9\omega_p$, $\alpha = 5$.

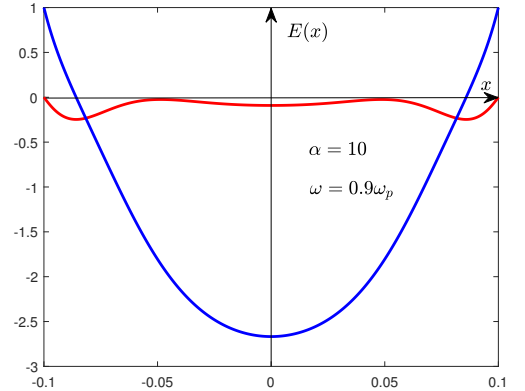


Рис. 4.40. $E(x)$ при $\omega = 0.9\omega_p$, $\alpha = 10$.

Анализ графиков 4.37–4.42 показывает, что при уменьшении частоты столкновений, так же как и для невырожденной плазмы, наблюдается увеличение пограничного слоя, который экранирует внешнее поле, а также увеличивается период осцилляций по координате.

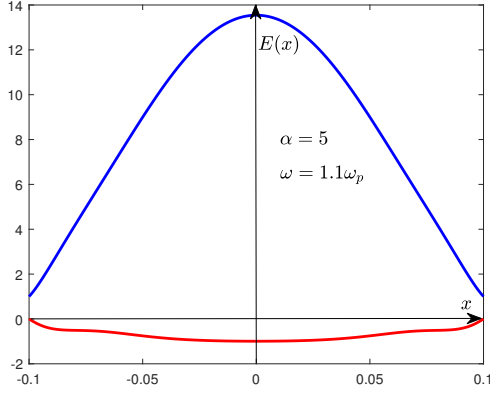


Рис. 4.41. $E(x)$ при $\omega = 1.1\omega_p, \alpha = 5$.

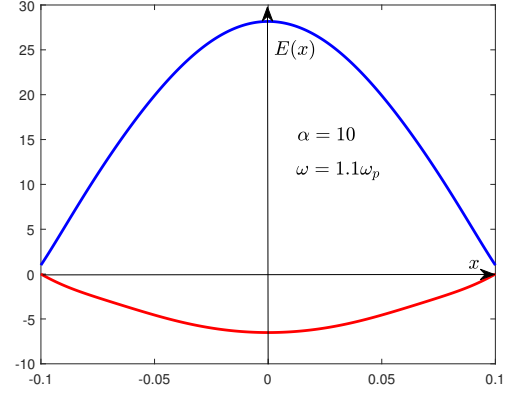


Рис. 4.42. $E(x)$ при $\omega = 1.1\omega_p, \alpha = 10$.

3.5. Свойства $\mathcal{E}(x)$, вытекающие из численных результатов.

В результате проведенных вычислений можно сделать следующие наблюдения:

1) При малых значениях частоты внешнего поля оно почти полностью экранируется и не проникает в плазму. Самый большой вклад в $E(x)$ дает слагаемое $E_b(x)$, гиперболический косинус резко убывает при удалении от границы. При малых частотах вклад слагаемых E_a и $E_c(x)$ очень мал.

2) При увеличении частоты внешнего поля растет модуль постоянной составляющей E_a .

3) Вклад слагаемого $E_c(x)$, который при низких частотах составляет доли процента, с увеличением частоты увеличивается и достигает десятков процентов.

4) При значениях $\omega = \omega_p$ возникает резонанс, абсолютная величина самосогласованного поля на порядки больше граничного условия.

5) При частотах, незначительно превышающих плазменную, возникают пространственные структуры (осцилляции по координате), которые потом с ростом частоты исчезают.

6) Почти при всех значениях частот (кроме плазменной) явно выражен приграничный слой, размер которого увеличивается при приближении частоты к значению ω_p и уменьшается при дальнейшем росте частоты. Резкое убывание

поля при удалении от границы для частот, меньших ω_p , объясняется характером поведения гиперболического косинуса в выражении для $E_b(x)$. При дальнейшем росте частоты при достижении величины ω^* слагаемое $E_b(x)$ отсутствует, т.к. у дисперсионной функции нет корней при таких параметрах. Но приграничный эффект присутствует и объясняется поведением интегрального слагаемого $E_c(x)$.

7) Если продолжается рост частоты ω (выше плазменной), то эффект от резонанса снижается, абсолютная величина самосогласованного поля уменьшается, приближаясь к граничному условию. При частотах, превышающих плазменную, внешнее электрическое поле “проходит” через плазменный слой, что соответствует теоретическим данным [2, 94].

8) При изменении значения ν поведение $E(x)$ сохраняет качественные характеристики. Но можно заметить, что с увеличением ν увеличивается пограничный слой и уменьшается число осцилляций по координате.

9) Для вырожденной плазмы увеличение химического потенциала α также приводит к увеличению пограничного слоя и уменьшению числа осцилляций по координате.

Заключение

В диссертации построено аналитическое решение краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений, полученной в результате линеаризации системы уравнений Больцмана — Максвелла. Такая краевая задача возникает при изучении воздействия электрического поля малой амплитуды на бесконечный плазменный слой.

Задачи об отклике плазмы на внешнее электромагнитное возмущение были предметом исследования многих ученых, начиная с основополагающих работ Л. Тонкса, И. Лэнгмюра, Л.Д. Ландау, и сохраняют актуальность в настоящее время. Это связано как с общетеоретическим значением такого направления, так и с важными техническими приложениями в проблемах физики плазмы.

Решение рассматриваемой краевой задачи (3.1)–(3.8), стр. 56, для линеаризованной системы Больцмана — Максвелла было найдено в диссертации с помощью развития метода преобразования Фурье в пространствах обобщенных функций D' , Z' , а также с помощью модификации метода Гахова — Мусхелишвили для решения задачи Римана сопряжения аналитических функций. В работе был предложен ряд конструктивных приемов, позволивших найти решение поставленной задачи в замкнутом аналитическом виде. Отметим, прежде всего, что при реализации метода преобразования Фурье применен прием расширения области, а также выведены новые формулы для преобразования Фурье специального класса обобщенных функций, представимых в виде интеграла по параметру. Решение системы интегральных уравнений в образах Фурье потребовало исследования дисперсионной функции $\Omega(\lambda)$, представленной в виде интеграла типа Коши с бесконечным контуром интегрирования. Предельные значения $\Omega^\pm(\lambda)$ этой функции использованы для факторизации коэффициента задачи Римана при модификации представлений Гахова — Мусхелишвили.

Построенное интегральное представление решения задачи (3.1)–(3.8), стр. 56, допускает широкий класс невозмущенных функций распределения, в том числе как функции Ферми — Дирака, так и Максвелла. Таким образом, результаты

диссертации могут быть применены при изучении различных физических эффектов в металлах, полупроводниках, кристаллах, в том числе, для анализа погранслоного поведения физических полей в таких средах. Отметим также, что найденные аналитические представления могут быть также применены для верификации численных методов.

Основные положения диссертации допускают обобщение для случая двумерных и трехмерных задач, а также имеют перспективу развития и применения для конструктивного решения краевых задач, возникающих в более сложных моделях, основанных на системах кинетических уравнений.

Литература

- [1] *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
- [2] *Абрикосов А.А.* Введение в теорию нормальных металлов. М.: Наука, 1972.
- [3] *Агранович М.С.* Обобщенные функции. М.: МЦНМО, 2014.
- [4] *Аристов В.В., Воронич И.В., Забелок С.А.* Исследование неклассического переноса с применением численных методов решения уравнения Больцмана // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 12. С. 2025–2034.
- [5] *Аристов В.В., Черемисин Ф.Г.* Прямое численное решение кинетического уравнения Больцмана М.: ВЦ РАН, 1992.
- [6] *Арцимович Л. А.* Управляемые термоядерные реакции. М.: Физматгиз, 1961.
- [7] *Баранов Н.Н.* Разработка методов контроля и управления режимом разряда на электродах в плазменных энергоустановках // ТВТ. 2001. Т. 39. № 6. С. 986–996.
- [8] *Баренгольц С. А., Месяц Г. А.* Взрывоэмиссионные процессы в термоядерных установках с магнитным удержанием плазмы и линейных электрон-позитронных коллайдерах // УФН. 2023. Т. 193. № 7. С. 751–769.
- [9] *Батт Ю., Йорн Э., Скубачевский А.Л.* Стационарные сферически симметричные решения системы Власова — Пуассона в трехмерном случае // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2020. Т. 493. С. 5–8.
- [10] *Батт Ю., Йорн Э., Скубачевский А.Л.* Трехмерные стационарные сферически симметричные модели звездной динамики, зависящие от локальной энергии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 9. С. 1491–1521.
- [11] *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.
- [12] *Безродных С.И.* Гипергеометрическая функция Лауричеллы $F(N)D$, задача Римана — Гильберта и некоторые приложения // УМН. 2018. Т. 73. № 6(444). С. 3–94.

- [13] *Безродных С.И., Власов В.И.* Сингулярная задача Римана — Гильберта в сложных областях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 12. С. 904–953.
- [14] *Безродных С.И., Власов В.И., Сомов Б.В.* Обобщенные аналитические модели токового слоя Сыроватского // Письма в Астрон. журнал. 2011. Т. 37. № 2. С. 133–150.
- [15] *Безродных С.И., Власов В.И., Сомов Б.В.* Обобщенные модели токового слоя Сыроватского с присоединенными МГД–ударными волнами // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика. 2011. № 24 (119). Вып. 25. С. 35–46.
- [16] *Безродных С.И., Власов В.И., Сомов Б.В.* Аналитическая модель магнитного пересоединения при наличии присоединенных к токовому слою ударных волн // Письма в Астрон. журнал. 2007. Т. 33. № 2. С. 153–160.
- [17] *Безродных С.И., Сомов Б.В.* Аналитическое решение задачи о взаимодействии ударной волны с магнитосферой нейтронной звезды // ДАН. 2014. Т. 457. № 4. С. 406–410.
- [18] *Безродных С.И., Гордеева Н.М.* Аналитическое решение системы интегро-дифференциальных уравнений для модели плазмы во внешнем поле // Суперкомпьютерные технологии математического моделирования: тезисы докладов V международной конференции. Под ред. В.И. Васильева. Москва, 2022.
- [19] *Безродных С.И., Гордеева Н.М.* Решение задачи Римана, возникающей при моделировании возмущении плазмы электрическим полем // Математические методы механики: тезисы докладов конференции. Под ред. А.Т. Ильичева. Москва, 2023.
- [20] *Бете Г., Зоммерфельд А.* Электронная теория металлов. М.: Гостехиздат, 1938.
- [21] *Биккин Х.М., Ляпилин И.И.* Неравновесная термодинамика и физическая кинетика. Екатеринбург: УрО РАН, 2009.
- [22] *Бисикало Д.В., Жилкин А.Г., Боярчук А.А.* Газодинамика тесных двойных звезд. М.: Физматлит, 2013.

- [23] *Бобров В.Б.* О поперечной диэлектрической проницаемости вырожденной электронной плазмы // ТВТ. 2017. Т. 55. Вып. 4. С. 489–492.
- [24] *Бобылев А.В.* Точные и приближенные методы в теории нелинейных кинетических уравнений Больцмана и Ландау. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1987.
- [25] *Боголюбов Н.Н.* Собрание научных трудов. Статистическая механика. Т. 8. Теория неидеального Бозе–газа, сверхтекучести и сверхпроводимости. М.: Наука, 2007.
- [26] *Бокун Г.С., Головкин М.Ф., Вихренко В.С.* Экранирование кулоновского взаимодействия в кристаллических материалах // Труды БГТУ. Серия 3: Физико–матем. науки и информатика. 2017. № 2 (200). С. 50–55.
- [27] *Брушлинский К.В., Кондратьев И.А.* Математические модели равновесия плазмы в тороидальных и цилиндрических магнитных ловушках // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 20.
- [28] *Брушлинский К.В., Крючков В.В., Степин Е.В.* Математическая модель равновесных конфигураций плазмы в магнитных ловушках и исследование их устойчивости // Труды МИАН. 2023. Т. 322. С. 58–70.
- [29] *Ван Кампен.* Дисперсионное уравнение для волн в плазме // Сб. статей “Колебания сверхвысоких частот в плазме”. Под ред. Бернашевского Г.А. и Чернова З.С. 1961. М.: ИИЛ. 360 с. (с. 57–70). К теории стационарных волн в плазме // Там же. С. 37–56.
- [30] *Веденяпин В.В.* Кинетическая теория по Максвеллу, Больцману и Власову. М.: Изд-во МГОУ, 2005.
- [31] *Веденяпин В.В.* Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001.
- [32] *Виноградов Е.А.* Поляритоны полупроводниковой микрополости // УФН. 2002. Т. 172. № 12. С. 1371–1410.
- [33] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
- [34] *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. 2-е изд. М.: Наука, 1979.

- [35] *Владимиров В.С., Жаринов В.В.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2000.
- [36] *Власов А.А.* О вибрационных свойствах электронного газа // Ж. эксперим. и теор. физики. 1938. Т. 8. Вып. 3. С. 291–318.
- [37] *Власов А.А.* Теория вибрационных свойств электронного газа и ее приложения. М.: ЛЕНАНД, 2017.
- [38] *Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г.* Обобщенные функции и уравнения в свертках. М.: Физматлит, 1994.
- [39] *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
- [40] *Гахов Ф.Д.* Краевая задача Римана для системы n пар функций // УМН. 1952. Т. 7. Вып. 4 (50). С. 3–54.
- [41] *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Особые интегральные уравнения типа свертки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 33–52.
- [42] *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции, вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматлит, 1959.
- [43] *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции, вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматлит, 1958.
- [44] *Гордеева Н.М.* Задача о колебаниях плазмы с конечной температурой. Тезисы докладов. Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», посвященная 170-летию со дня рождения великого русского ученого Н.Е. Жуковского. Москва, 24–27 октября 2017 года. С. 183–184.
- [45] *Гордеева Н.М.* Колебательные процессы в электронной плазме с произвольной степенью вырождения // Инженерный журнал: наука и инновации. 2018. № 8 (80). С. 1–13.
- [46] *Гордеева Н.М.* Математическое моделирование поведения плазмы в слое // Суперкомпьютерные технологии математического моделирования: тезисы докладов IV международной конференции. Под ред. В.И. Васильева. Якутск: Изд. дом СВФУ, 2019.

- [47] Гордеева Н.М., Юшканов А.А. Невырожденная электронная плазма в слое во внешнем электрическом поле с зеркальным условием на границе // ТВТ. 2018. Т. 56. № 5. С. 687–695.
- [48] Гордеева Н.М., Юшканов А.А. Особенности поведения моды Дебая в электронной плазме при различных степенях вырождения электронного газа // Письма в ЖТФ. 2018. Т. 44. Вып. 24. С. 143–149.
- [49] Гордеева Н.М., Латышев А.В. Задача о колебаниях в канале плазмы с произвольной степенью вырождения электронного газа // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2018. № 3 (78). С. 97–103.
- [50] Гордеева Н.М., Юшканов А.А. Влияние параметров плазмы на дебаевское экранирование // Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», посвященная памяти академика Леонида Ивановича Седова в связи со столетием со дня его рождения, 13–15 ноября 2017 г. Тезисы докладов. С. 86–89.
- [51] Гордеева Н.М., Юшканов А.А. Дебаевское экранирование в сильно вырожденной плазме // Материалы 10-й Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике», часть 1. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019. С. 245–248.
- [52] Гордеева Н.М., Юшканов А.А. Поведение моды Дебая электронной плазмы в зависимости от параметров задачи // Физические свойства материалов и дисперсных сред для элементов информационных систем, наноэлектронных приборов и экологических технологий. Сборник трудов межд. конф. Гл. ред. В.В. Беляев. Под ред. Е.А. Бедриковой. 2018. С. 148–151.
- [53] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // УМН. 1958. Т. 13. Вып. 2(80). С. 3–72.
- [54] Грицык П.А., Сомов Б.В. Современные аналитические модели ускорения и распространения электронов в солнечных вспышках // УФН. 2023. Т. 193. № 5. С. 465–490.
- [55] Гуртов В.А. Твердотельная электроника. Учебное пособие. Петрозаводск: изд. ПетрГУ, 2005.

- [56] *Демидов А.С.* Обобщенные функции в математической физике. Основные идеи и понятия. М.: МЦМНО, 2020.
- [57] *Демидов А.С.* Функционально–геометрический метод решения задач со свободной границей для гармонических функций // Успехи мат. наук. 2010. Т. 65. Вып. 1 (396). С. 3–96.
- [58] *Дербенев И.Н., Филиппов А.В.* Экранирование заряда пылевой частицы в плазме сухого воздуха, создаваемой внешним источником ионизации // Ж. exper. и теор. физики. 2015. Т. 148. № 2. С. 391–406.
- [59] *Доброхотов С.Ю., Макракис Г.Н., Назайкинский В.Е., Тудоровский Т.Я.* Новые формулы для канонического оператора Маслова в окрестности фокальных точек и каустик в двумерных квазиклассических асимптотиках // ТМФ. 2013. Т. 177. Вып. 3. С. 355–386.
- [60] *Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Шафаревич А.И.* Новые интегральные представления канонического оператора Маслова в особых картах // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. Вып. 2. С. 53–96.
- [61] *Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Шафаревич А.И.* Эффективные асимптотики решений задачи Коши с локализованными начальными данными для линейных систем дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений // УМН. 2021. Т. 76. Вып. 5 (461). С. 3–80.
- [62] *Займан Дж.* Электроны и фононы. М.: Мир, 1962.
- [63] *Займан Дж.* Принципы теории твердого тела. М.: Мир, 1974.
- [64] *Зверович Э.И.* Краевые задачи для аналитических функций в гильбертовых классах на римановых поверхностях // УМН. 1971. Т. 26. Вып. 1(157). С. 113–179.
- [65] *Зелёный Л.М.* Динамика плазмы и магнитных полей в хвосте магнитосферы Земли. В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Исследования космического пространства. Т. 24. М.: ВИНТИ, 1986.
- [66] *Зубов В.И., Албу А.Ф.* О методах численного решения одной спектральной задачи // Информационные технологии и вычисл. системы. 2022. Вып. 4. С. 35–49.

- [67] *Игнатов А.М.* Канонические переменные уравнения Власова // Физика плазмы. 2004. Т. 30. № 1. С. 47–59.
- [68] *Игнатов А.М.* Электромагнитные волны Ван Кампена // Физика плазмы. 2017. Т. 43. № 1. С. 21–28.
- [69] *Инфельд Э., Роуландс Дж.* Нелинейные волны, солитоны и хаос. Пер. с англ. под ред. Е.А. Кузнецова, 2-е изд. М.: Физматлит, 2006.
- [70] *Истомин Я.Н., Комберг Б.В.* Новая модель источника Гамма-всплеска // Астрон. журн. 2002. Т. 46. № 11. С. 908–917.
- [71] *Ишимару С.* Основные принципы физики плазмы. М.: Атомиздат, 1975.
- [72] *Кадомцев Б.Б.* Коллективные явления в плазме. М.: Наука. 1976.
- [73] *Кац Д.Б.* Обобщенное интегрирование по неспрямляемым плоским кривым и краевые задачи // Изв. вузов. Матем. 2023. № 12. С. 17–38.
- [74] *Кац Б.А., Кац Д.Б., Люй Ч.* Краевая задача Римана на круговых спиралях // Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62. № 3. С. 525–537.
- [75] *Кац Б.А., Миронова С.Р., Погодина А.Ю.* Краевая задача о скачке на контуре с протяженными особенностями // Известия вузов. Матем. 2017. № 1. С. 12–16.
- [76] *Кейз К.М., Цвайфель П.Ф.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972.
- [77] *Климентов С.Б.* Граничные свойства обобщенных аналитических функций. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.
- [78] *Климентов С.Б.* Задача Римана — Гильберта в классах Харди для общих эллиптических систем первого порядка // Известия вузов. Матем. 2016. № 6. С. 36–47.
- [79] *Компанеев А.С.* Курс теоретической физики. Т. 2. Статистические законы. М.: Просвещение, 1975.
- [80] *Костомаров Д.П., Днестровский Ю.Н.* Математическое моделирование плазмы. М.: Наука, 1982.

- [81] *Крейн С.Г. и др.* Функциональный анализ, изд. 2, коллектив авторов, редактор С.Г. Крейн. М.: Наука, 1972.
- [82] *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений, изд. 2-е, исправл. и доп. М.: Физматлит, 2012.
- [83] *Куликовский А.Г., Чугайнова А.П.* О структурах неклассических разрывов в решениях гиперболических систем уравнений // УМН. 2022. Т. 77. Вып. 1 (463). С. 55–90.
- [84] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
- [85] *Лазарева Г.Г., Оксогоева И.П., Судников А.В.* Влияние параметров математической модели на распределение плотности плазмы в винтовом магнитном поле // Сиб. журн. индустр. матем. 2023. Т. 26. № 4. С. 65–76.
- [86] *Ландау Л.Д.* О колебаниях электронной плазмы // Собрание трудов. М.: Наука, 1969. Т. 2. С. 7–25.
- [87] *Латышев А.В., Гордеева Н.М.* Поведение плазмы с произвольной степенью вырождения электронного газа в слое проводящей среды // ТМФ. 2017. Т. 192. № 3. С. 506–522.
- [88] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Аналитическое решение задачи о поведении вырожденной электронной плазмы. Глава 10 в Энциклопедии низкотемпературной плазмы: Фортов В.Е (глав. ред.) Т. VII-I “Математическое моделирование в низкотемпературной плазме”. С. 159–177. М.: Янус-К. 2008.
- [89] *Латышев А.В., Лесскис А.Г., Юшканов А.А.* Точное решение задачи о поведении электронной плазмы в слое металла в переменном электрическом поле // ТМФ. 1992. Т. 90. № 2. С. 179–189.
- [90] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Аналитическое решение задачи о поведении столкновительной плазмы в полупространстве во внешнем переменном электрическом поле // ТМФ. 1995. Т. 103. № 2. С. 299–311.
- [91] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Метод решения граничных задач для кинетических уравнений // Ж. выч. матем. и матем. физики. 2004. Т. 44. № 6. С. 1107–1118.

- [92] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Плазма в слое металла во внешнем высокочастотном электрическом поле // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 5. С. 29–37.
- [93] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Электронная плазма в полупространстве металла в переменном электрическом поле // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 8. С. 1229–1241.
- [94] *Левич В.Г., Вдовин Ю.А., Мямлин В.А.* Курс теоретической физики. Том II. М.: Наука, 1971.
- [95] *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). М.: ТОО “Янус”, 1995.
- [96] *Лифшиц И.М.* Электронная теория металлов / И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов. М.: Наука, 1971.
- [97] *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Теоретическая физика. Том 10: Физическая кинетика. М.: Наука. 1979.
- [98] *Мальцева А.М., Обносов Ю.В., Rogozin С.В.* Обобщение теоремы Милн — Томсона на случай концентрического кольца // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2006. Т. 148, кн. 4. С. 35–50.
- [99] *Маслов В.П., Федорюк М.В.* Линейная теория затухания Ландау // Матем. сб. 1985. Т. 127 (169), № 4(8). С. 445–475.
- [100] *Мирнов С. В.* Физические процессы в плазме токамака. М.: Энергоатомиздат, 1985.
- [101] *Морозов А.И.* Введение в плазмодинамику. М.: Физматлит, 2006.
- [102] *Морозов И.В., Норман Г.Э.* Столкновения и плазменные волны в неидеальной плазме // Ж. exper. и теор. физики. 2005. Т. 127. Вып. 2. С. 412–430.
- [103] *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М.: Наука, 1968.
- [104] *Обносов Ю.В.* Задача $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения для софокусного эллиптического кольца // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2008. Т. 150, кн. 4. С. 137–146.

- [105] *Пальцев Б.В.* О канонической матрице решений задачи линейного сопряжения с кусочно–непрерывным матричным коэффициентом на элементарной кусочно–гладкой кривой // ДАН СССР. 1987. Т. 297. № 5. С. 1054–1058.
- [106] *Пальцев Б.В.* Асимптотика спектра интегральных операторов свертки на конечном интервале с однородными полярными ядрами // Известия РАН. Серия математическая. 2003. Т. 67. № 4. С. 67–154.
- [107] *Платцман Ф., Вольф П.* Волны и взаимодействия в плазме твердых тел. М.: Мир, 1975.
- [108] *Шакура Н.И., Постнов К.А., Колесников Д.А., Липунова Г.В.* Магниторотационная неустойчивость в кеплеровских дисках: нелокальный подход. УФН. 2023. Т. 193. № 12. С. 1340–1355.
- [109] *Прист Э., Форбс Т.* Магнитное пересоединение. М.: Физматлит, 2005.
- [110] *Риман Б.* Сочинения. М.: Гостехиздат, 1948.
- [111] *Салимов Р.Б., Шабалин П.Л.* Краевая задача Гильберта теории аналитических функций и ее приложения. Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2005.
- [112] *Савельев И.В.* Курс общей физики. Т. 3. М.: Наука. 1987.
- [113] *Силин В.П., Рухадзе А.А.* Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред. М.: Госатомиздат, 1961.
- [114] *Соболев С.Л.* Задача Коши в пространстве функционалов // ДАН СССР, 1935. Т. 3 (8), вып. 7 (67). С. 291–294.
- [115] *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд. Ленинградского ун-та, 1950.
- [116] *Солдатов А.П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М.: Высшая школа, 1991.
- [117] *Солдатов А.П.* Метод теории функций в эллиптических задачах на плоскости. II. Кусочно гладкий случай // Изв. АН СССР. Серия математическая. 1992. Т. 56, № 3. С. 566–604.

- [118] *Солдатов А.П.* Весовые классы Харди аналитических функций // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 6. С. 809–817.
- [119] *Солдатов А.П.* К теории анизотропной плоской упругости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2016. Т. 60. С. 114–163.
- [120] *Сохоцкий Ю.В.* Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды. С.–Петербург: тип. М. Стасюлевича, 1873.
- [121] *Тамм И.Е., Сахаров А.Д.* Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, т. 1. М.: АН СССР, 1958.
- [122] *Ферцигер Д., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976.
- [123] *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.-Л.: ОНТИ, 1937.
- [124] *Хведелидзе Б. В.* Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат., ВИНТИ АН СССР. 1975. Т. 7. С. 5–162.
- [125] *Хёрмандер Л.* О делении обобщенных функций на полиномы // Математика (сборник переводов). 1959. Т. 3. № 5. С. 117–130.
- [126] *Хищенко К.В., Чарахчьян А.А.* Численное исследование неустойчивости границы раздела сред при термоядерном горении цилиндрической оболочечной микромишени // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 4. С. 678–693.
- [127] *Черемисин Ф.Г.* Консервативный метод дискретных ординат для решения кинетического уравнения Больцмана. М.: ВЦ РАН, 1996.
- [128] *Черемисин Ф.Г.* Решение уравнения Больцмана в режиме сплошной среды // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 2. С. 336–348.
- [129] *Черемисин Ф.Г.* Ускорение решения уравнения Больцмана с помощью контроля величины вкладов в интеграл столкновений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 12. С. 2035–2050.

- [130] *Шабалин П.Л., Фаизов Р.Р.* Задача Римана с условием на вещественной оси для обобщенных аналитических функций с сингулярной линией // Сиб. матем. журн. 2023. Т. 64. № 2. С. 449–462.
- [131] *Шабалин П.Л., Фатыхов А.Х.* Неоднородная краевая задача Гильберта с конечным числом точек завихрения логарифмического порядка // Изв. вузов. Матем. 2021. № 1. С. 64–80.
- [132] *Шафранов В.Д.* О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // Ж. эксперимент. и теор. физ. 1957. Т. 33. № 3(9). С. 710–722.
- [133] *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. Перевод с англ. М.: Мир, 1965.
- [134] *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Изд-во Моск. университета. 1984.
- [135] *Шукла П.К., Элиассон Б.* Нелинейные аспекты квантовой физики плазмы // УФН. 2010. Т. 180. № 1. С. 55–82.
- [136] *Azarova O.A., Kravchenko O.V.* The use of plasma structures and combined energy deposition for high-speed flow control: A selective review, *Energies*. 2024. V. 17. № 7. № 1632–1670.
- [137] *Bezrodnykh S.I., Gordeeva N.M.* Analytic Solution of the System of Integro-Differential Equations for the Plasma Model in an External Field // *Russian Journal of Mathematical Physics*. 2023. V. 30. Iss. 4. P. 443–452.
- [138] *Bezrodnykh S.I., Gordeeva N.M.* Solution of a non classical singular integral equation arising in plasma physics // *Math. Notes*. 2023. V. 114. Iss. 5–6. P. 521–538.
- [139] *Bezrodnykh S.I., Gordeeva N.M.* Solution of a non-local boundary value problem simulating plasma perturbation by an electric field // *Book of Abstracts III International Conference “Mathematical Physics, Dynamical Systems, Infinite-Dimensional Analysis”*, dedicated to the 100th anniversary of V.S. Vladimirov, the 100th anniversary of L.D. Kudryavtsev and the 85th anniversary of O.G. Smolyanov. July 5–13, 2023. Moscow Region, Dolgoprudny. P. 31–33.

- [140] *Bezrodnykh S.I., Vlasov V.I.* Asymptotics of the Riemann–Hilbert Problem for the Somov Model of Magnetic Reconnection of Long Shock Waves // Math. Notes. 2021. V. 110. № 6. P. 853–871.
- [141] *Bhatnagar P.L., Gross E.M., Krook M.* A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one component systems // Phys. Rev. 1954. V. 94. P. 511–525.
- [142] *Biskamp D.* Magnetic Reconnection in Plasmas. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
- [143] *Carleman T.* Sur la résolution de certaines équations intégrales // Arkiv för Matematik, Astronomi och Physik. 1922. V. 16. № 26. P. 1–19.
- [144] *Case K.M.* Elementary solutions of the transport equations and their applications // Ann. Phys. 1960. V. 9. № 1. P. 1–23.
- [145] *Cercignani C.* Theory and application of the Boltzmann equation. Scottish Academic Press. Edinburg and London, 1975. Имеется перевод: Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
- [146] *Gordeeva N.M.* Calculating a Perturbation of a Plasma Layer by an Electric Field // Comp. Maths and Math. Physics. 2024. V. 64. № 3. P. 465–479.
- [147] *Gordeeva N.M., Yushkanov A.A.* On behavior peculiarity of electron plasma // International Interdisciplinary Conference “Euler Readings MRSU 2017” 22–24 November 2017, Moscow Region State University (MRSU), Russian Federation. Journal of Physics: Conf. Series. 2018. V. 996. P. 012009.
- [148] *Gordeeva N.M., Yushkanov A.A.* On Some Peculiarity in Behavior of Plasma with an Arbitrary Degree of Degeneracy of Electron Gas in Thin Layer/ Journal of Physics: Conference Series. 10th All-Russian Conference on Irreversible Processes in Nature and Technology. 2019. P. 012044.
- [149] *Gordeeva N.M., Yushkanov A.A.* The Search Algorithm for Discrete Mode of Electron Plasma/ Journal of Physics: Conference Series. 4th International Conference on Supercomputer Technologies of Mathematical Modelling, SCTeMM 2019. 2019. P. 012007.

- [150] *Henrici P.* Applied and Computational Complex Analysis. Vol. 1–3. New York: John Wiley and Sons, 1991.
- [151] *Hilbert D.* Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig — Berlin: B.G. Teubner, 1912.
- [152] *Hörmander L.* The Analysis of Linear Partial Differential Operators. IV, Fourier Integral Operators. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo. Springer-Verlag. 1985.
- [153] *Langmuir I.* Oscillations in Ionized Gases // Proc. Nat. Acad. Sci. 1928. V. 14. P. 627–637.
- [154] *Noether F.* Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen // Math. Ann. 1921. Bd. 82, H. 1–2, S. 42–63.
- [155] *Parker E.N.* Cosmic Magnetic Fields. Their Origin and Their Activity. Oxford: Clarendon Press, 1979.
- [156] *Picard É.* Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles avec des applications à la physique mathématique. Paris: Gauthier-Villars et Cie., 1927.
- [157] *Plemelj J.* Riemannsche funktionenscharen mit gegebener Monodromie-gruppe // Monatsh. Math. und Phys. 1908. Bd. 19. S. 205–210.
- [158] *Prösdorf S.* Einige Klassen singulärer Gleichungen. Berlin: Akademie — Verlag, 1974.
- [159] *Schwartz L.* Théorie des distributions. T. 1, 2. Paris: Hermann, 1950–51.
- [160] *Somov B.V.* Plasma Astrophysics, Part II, Reconnection and Flares, Second Edition, Springer SBM, New York, 2013.
- [161] *Tonks L., Langmuir I.* A General Theory of the Plasma on an Arc // Physical Rev. 1929. V. 34. P. 876–922.
- [162] *Van Kampen N.G.* On the Theory of Stationary Waves in Plasmas // Physica. 1955. V. 21. P. 949–963.
- [163] *White R.B.* Theory of Tokamak plasmas. North-Holland, Amsterdam — Oxford — New-York — Tokio, 1989.