

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертацию Парастаева Григория Сергеевича
«Гипотеза Рамсея как принцип отбора по Фишеру и ее обобщения»,
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических
наук
по специальности

1.1.2 — Дифференциальные уравнения и математическая физика

Гипотеза Рамсея о социальной стратификации является признаком наличие неравенства в распределении богатства, доходов среди членов общества. Само явление неравенства может как стимулировать накопление капитала и экономический рост, так и приводить к замедлению экономического роста и возможным социальным последствиям. Наличие большого числа дискуссий среди специалистов подчеркивает важность поиска хороших путей разрешения данной проблемы и обосновывает актуальность выбранной автором темы. С использованием теории дифференциальных уравнений и оптимального управления автором диссертации применяется математический аппарат для исследования этой проблемы.

Диссертационная работа Г. С. Парастаева состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и двух приложений.

Первая глава работы посвящена рассмотрению задачи о поведении рационального репрезентативного потребителя рамсеевского типа. В ней автор дает четыре варианта постановки, каждый из которых представляет собой задачу оптимального управления на бесконечном горизонте времени. Первый вариант предусматривает возможность для потребителя брать кредит, который может быть обеспечен будущими поступлениями заработной платы. Во втором варианте накладывается запрет на заимствование, что делает капитал экономического агента неотрицательной величиной. Для третьего варианта введено ограничение на неотрицательность производной капитала, что делает невозможным для агента избавиться от накоплений. Поэтому данный вариант носит название случая с неликвидным капиталом. Наконец, четвертый вариант постановки обозначен как случай с ограниченной ликвидностью капитала, поскольку в нем вводится параметр, определяющий время реализации актива. Чтобы найти решение для каждого случая, автором используется необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина с конечным временным горизонтом. Далее, для первых двух случаев полученный кандидат проверяется на оптимальность посредством теоремы верификации. Для двух других случаев автор приводит достаточные условия, при которых выполняется теорема существования решения задачи оптимального управления на бесконечном горизонте. Решение в форме синтеза получается устремлением временного горизонта к бесконечности. В силу возможной расходимости функционала автором для уточнения понятия оптимальности введено понятие обобщенного решения, которое получается переходом к поточечному пределу при устремлении временного горизонта в бесконечность.

Во второй главе Г. С. Парастаев строит модели социальной динамики, используя гипотезу относительного дохода для программ потребительских расходов, которые мгновенно корректируются по меняющимся значениям капитала и коэффициента дисконтирования, задаваемого эндогенным образом в зависимости от относительного уровня его дохода. На функцию, задающую эту зависимость, накладываются предположения о непрерывности по Липшицу, строгом убывании, а также о выполнении неравенств для значений этой функции в конкретных точках. Для построенных задач Коши для системы нелинейных ОДУ первого порядка автор формулирует теорему об асимптотике решений, которая устанавливает справедливость гипотезы Рамсея, причем разделение на два класса наблюдается как по абсолютным величинам доходов агентов, так и по их относительным величинам. Доказательство автором проводится фактически в два этапа: сначала он получает нижние оценки на разность значений функции, задающей коэффициент дисконтирования каждого агента, а затем применяет теорему Чаплыгина о дифференциальных неравенствах для получения верхней оценки на сумму долей доходов тех домохозяйств, чьи начальные доходы меньше самых богатых домохозяйств. Это позволяет автору сначала доказать сходимость для относительных величин дохода, а затем и сходимость для абсолютных величин.

В третьей главе сначала для ранее рассмотренных задач Коши устанавливается связь между индексом Джини и функцией Ляпунова. Далее автором на основе континуального аналога модели Рамсея-Бьюли выводится интегро-дифференциальное уравнение динамики кривой Лоренца. Автор показывает, что для решения этого уравнения выполняется свойство межвременной мажоризации по Лоренцу. Далее дается определение передачи Пигу-Дальтона в непрерывном случае, с помощью которого вводится функция перераспределения доходов, используемая для получения модифицированного уравнения динамики кривой Лоренца. Полученные уравнение и начально-краевые условия, образующие смешанную задачу для интегро-дифференциального уравнения, называются автором моделью государства всеобщего благосостояния, где роль последнего играет выбранное стационарное распределение доходов. Для данной задачи автор последовательно доказывает ее основные свойства. Для доказательства существования и единственности решения смешанной задачи автор переходит к интегральному уравнению и вводит параметризованную метрику, которая при определенных значениях параметра определяет отображение в правой части интегрального уравнения как сжимающее, а затем применяет принцип сжимающих отображений. Единственность стационарного решения уравнения смешанной задачи доказывается автором от противного, а его асимптотическую устойчивость автор доказывает в несколько шагов. С помощью линеаризации интегро-дифференциального оператора доказано, что спектр линеаризованного оператора лежит в левой полуплоскости и следовательно стационарное решение уравнения асимптотически устойчиво. Для реализации Автор приводит строгое доказательство этого утверждения, доказывая дифференцируемость интегро-дифференциального оператора и вычисляя производную по Фреше с последующим переходом к рассмотрению краевой задаче

на собственные значения для линейной неавтономной системы ОДУ первого порядка, решение которой удастся построить в явном виде. Проблема собственных значений сводится к поиску комплексных корней уравнения, левая часть которого определяется функцией комплексного переменного, а именно интегралом с комплексным параметром. Именно для этого уравнения в конечном итоге приводятся достаточные условия отсутствия корней в правой полуплоскости. Перечисленные автором в заключении результаты диссертации обладают следующей научной новизной:

1. В задаче оптимального управления на бесконечном горизонте времени решена проблема учета условий трансверсальности. В задаче с фазовыми ограничениями доказано каким образом происходит взаимодействие траектории с фазовой границей;
2. Установлена асимптотика решений для Коши системы рассмотренных ранее обыкновенных дифференциальных уравнений. В ряде случаев доказана теорема о связи между индексом Джини и функцией Ляпунова. Доказана глобальная асимптотическая устойчивость положения равновесия;
3. Доказано свойство меж временной мажоризации по Лоренцу для решения интегро-дифференциального уравнения динамики кривой Лоренца, которая получена из континуального аналога модели Рамсея-Бьюли.
4. Построена и исследована новая смешанная задача для интегро-дифференциального уравнения, моделирующая влияние перераспределения доходов государством на социальную динамику. Доказано, что решение задачи существует, единственно и сохраняет на всем бесконечном временном промежутке свойства кривой Лоренца. Доказано, что уравнение смешанная задача обладает единственным стационарным решением, причем оно является локально асимптотически устойчивым.

Несмотря на то, что диссертация посвящена исследованию математических моделей экономики с помощью применения строгого математического анализа, полученные теоретические результаты несомненно представляют практический интерес в области математического моделирования социально-экономических систем.

По тексту диссертации можно отметить следующие замечания:

1. В диссертационной работе стоило более подробно прокомментировать связь гипотезы Рамсея с принципом Фишера. Вероятно, автором имеется в виду фундаментальная «теорема» естественного отбора Р. Фишера, в которой утверждается, что средняя приспособленность в процессе эволюции биологических видов не должна уменьшаться. И такая связь действительно в точности обнаруживается для случаев Бьюли и с неликвидным капиталом в Главе 2. Заметив, что правая часть задач Коши, соответствующих вышеуказанным случаям, может быть представлена в виде общих уравнений естественного отбора А.Н. Колмогорова, можно показать, что средняя величина фитнеса, выражаемая через доли относительного дохода, для данных систем не убывает со временем;
2. Не обосновано выполнение одного из условий Теоремы 3.3 (с. 96) — определенность и непрерывность смешанных частных производных y_{tx} и y_{xt}

на множестве M , хотя оно элементарно проверяется непосредственно операциями интегрирования и дифференцирования в соответствующем порядке для уравнения (3.8а) с возможностью внесения операции взятия частной производной под знак интеграла.

Сделанные замечания, конечно, не преуменьшают ценности проведенного исследования.

Диссертационная работа «Гипотеза Рамсея как принцип отбора по Фишеру и ее обобщения» представляется законченным исследованием, выполненным на высоком математическом уровне. Автореферат диссертации достоверно отражает содержание работы и полностью соответствует необходимым требованиям, а диссертация, в свою очередь, полностью удовлетворяет требованиям п. 9-14 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 № 842.

Таким образом, считаю, что автор диссертации Парастаев Григорий Сергеевич заслуживает присуждения искомой ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2 — Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук по специальности

01.01.02 «Дифференциальные уравнения и математическая физика»,

профессор,

профессор кафедры «Прикладная математика»

Института управления и цифровых технологий

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)

тел.: +7 (495) 274-02-74

e-mail: alexander.bratus@yandex.ru



/ Братусь Александр Сергеевич

«14» августа 2026 г.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет транспорта»

Сокращенное название: ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ), РУТ (МИИТ)

Адрес: 127055, ГСП-4, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9

тел.: +7 (495) 274-02-74

e-mail: info@rut-miit.ru; tu@rut-miit.ru

ПОДПИСЬ
ЗАВЕРЯЮ
НАЧАЛЬНИК ОЦЕНКИ
И.В. ФЕДЯКИН

