На правах рукописи

Рябиков Андрей Игоревич

Численные методы аппроксимации границы Парето в задачах оптимизации правил управления динамическими системами с разрывными многоэкстремальными критериями

Специальность 1.2.2 -
математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2022

Работа выполнена в Федеральном исследовательском центре «Информатика и управление» Российской Академии наук в отделе математического моделирования экономических систем.

Научный руководитель: **Лотов Александр Владимирович**
доктор физико-математических наук, профессор,
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, главный научный сотрудник отдела математического моделирования экономических систем

Официальные оппоненты: **Подиновский Владислав Владимирович**
доктор технических наук, профессор,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», факультет экономических наук, профессор-исследователь

Морозов Владимир Викторович,
кандидат физико-математических наук, доцент
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова», Факультет вычислительной математики и кибернетики, доцент

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук

Защита состоится ____ ___________2022 г. в ___ часов на заседании диссертационного совета 24.1.224.01 на базе Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» (ФИЦ ИУ РАН) по адресу: 117312, г. Москва, проспект 60-летия Октября, 9 (конференц-зал, 1-й этаж).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИЦ ИУ РАН по адресу: г. Москва, ул. Вавилова, д. 44 к. 2 и на официальном сайте ФИЦ ИУ РАН: http://www.frccsc.ru.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, кор. 2, ученому секретарю диссертационного совета 24.1.224.01.

Автореферат разослан ___ ____________ 2022 г.
Телефон для справок: +7 (499) 135-51-64.

Ученый секретарь диссертационного совета 24.1.224.01,
кандидат физико-математических наук, доцент

И.В. Смирнов

1 Общая характеристика работы

1.1 Актуальность темы

В диссертационной работе рассматривается задача оптимизации правил управления динамической системой на основе использования ее математической модели. Эта задача, называемая также задачей синтеза оптимального управления и задачей управления с обратной связью, является классической задачей теории управления (Л.С. Понтрягин и др., 1961, Н.Н. Моисеев, 1975). В рамках ее решения строится такая зависимость управления от текущего состояния (обратная связь), которая максимизирует некоторый критерий качества управления. Особенность данной работы состоит в том, задача построения правила управления изучается при наличии большого числа конфликтующих критериев. Как обычно, предполагается, что структура обратной связи задана, поэтому требуется выбрать вектор параметров обратной связи. Рассматривается многошаговая математическая модель динамической системы, что позволяет свести задачу к задаче многокритериальной оптимизации.

Спецификой изучаемой задачи многокритериальной оптимизации (МКО) является то, что качество правил управления описывается критериями типа уровня обеспеченности, имеющими смысл доли шагов, на которых выполняются (или не выполняются) некоторые априорные требования, предъявляемые к системе. Критерии такого типа возникают, например, в водных проблемах при анализе надежности выполнения санитарных, экологических, экономических, социальных и других требований, предъявляемых к водным объектам. Эти критерии характеризуются кусочно-постоянной зависимостью от параметров правил управления, а также многоэкстремальностью. Подчеркнем, что выбор именно таких критериев в водохозяйственной задаче обусловлен требованиями Минприроды РФ к управлению водными объектами. Изучаемая в исследовании задача МКО является обобщением задачи построения правил управления каскадом водохранилищ и отражает ее главные особенности.

Математическим решением задачи МКО является множество оптимальных по Парето (эффективных) вариантов решения и соответствующая ему граница Парето множества достижимых критериальных векторов. На практике при решении задач МКО требуется выбрать единственный оптимальный по Парето вариант решения задачи, что осуществляется на основе предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР). В рамках теории МКО разработано несколько подходов к построению методов выбора единственного решения, отличающиеся по роли ЛПР. Данная работа относится к подходу, основанному на аппроксимации границы Парето и информировании ЛПР об этой границе. Этот подход для линейной задачи с двумя критериями был предложен и реализован в середине 1950-х годов С. Гассом и Т. Саати. В нашей стране основные идеи этого подсдхода были высказаны сразу для многих критериев академиками Н.Н. Моисеевым и Г.С. Поспеловым в конце 1960-х годов. С начала 1970-х годов численные методы аппроксимации границы Парето развивались в ВЦ АН СССР им. А.А. Дородницына и МГУ им. М.В. Ломоносова научными школами академиков П.С. Краснощекова и А.А. Петрова, а в настоящее время они развиваются школой академика Ю.Г. Евтушенко. Большое влияние на формирование этой области науки оказали теоретические исследования Ю.Б. Гермейера, В.В. Федорова, В.В. Подиновского и В.Д. Ногина, а также опыт применения аппроксимации границы Парето в рамках разработки систем автоматизации проектирования самолетов под руководством П.С. Краснощекова и Ю.А. Флерова. Важный вклад в развитие численных методов аппроксимации границы Парето внесли как исследователи, принадлежащие к упомянутым научным школам (В.А. Бушенков, А.И. Голиков, Ф.И. Ерешко, Г.К. Каменев, А.В. Лотов, И.С. Меньшиков, В.В. Морозов, В.Н. Нефедов, Н.М. Новикова, Н.М. Попов, М.А. Посыпкин, О.Л. Черных и др.), так и многие другие российские и зарубежные исследователи (И.М. Соболь, Р.Б. Статников, J. Cohon, K. Deb, K. Miettinen, R. Steuer, A. Wierzbicky, P.-L. Yu, M. Zeleny, E. Zitzler и др.).

Следует отметить, что если в XX веке методы МКО, основанные на аппроксимации границы Парето, не занимали ведущего положения в прикладных исследованиях, то в начале XXI века они стали применяться чаще других методов. К настоящему моменту разработано несколько подходов к созданию численных методов аппроксимации границы Парето, однако они не обеспечивают построения достаточно точной аппроксимации границы Парето за разумное время в задаче многокритериальной оптимизации правил управления динамическими системами с критериями типа уровня обеспеченности. Этот факт, а также практическая важность таких задач обуславливает **актуальность** темы исследования, состоящей в разработке новых численных методов аппроксимации границы Парето в задаче МКО с критериями такого типа и их применении в задаче управления Ангарским каскадом водохранилищ.

1.2 Цель работы

Целью работы является разработка численных методов аппроксимации границы Парето для задач многокритериальной оптимизации правил управления динамическими системами, описываемыми многошаговыми математическими моделями с критериями типа уровня обеспеченности, и применение разработанных методов для построения эффективных правил управления водными ресурсами каскада водохранилищ реки Ангары.

Для достижения этой цели потребовалось решить следующие **задачи**:

- Разработать методику многокритериальной оптимизации управления нелинейной динамической системой с критериями типа уровня обеспеченности, основанную на использовании многошаговой модели, аппроксимации оболочки Эджворта-Парето и визуализации границы Парето;
- Разработать и включить в многошаговую балансовую модель каскада водохранилищ математическую модель правила согласованного управления каскадом и обосновать способ расчета траектории системы по заданным параметрам правила управления;
- Разработать методы оптимизации критериев типа уровня обеспеченности и их сверток;
- Разработать численные методы аппроксимации оболочки Эджворта-Парето, предназначенные для задач с критериями типа уровня обеспеченности;
- Разработать комплекс программ для персональных и многопроцессорных компьютеров,
- Применить методы и программное обеспечение для оптимизации правил управления водными ресурсами озера Байкал и Ангарского каскада водохранилищ.

1.3 Методы исследования

Методическую базу данного исследования составляют методы многокритериальной оптимизации, методы решения нелинейных задач оптимизации, численные методы аппроксимации многомерных тел, методы моделирования водных систем, методы теории вероятностей.

1.4 Научная новизна

- Разработан и исследован комплекс численных методов аппроксимации границы Парето, основанных на концепции «стартовой площадки» и пригодных для случая

многошаговых моделей с большим числом многоэкстремальных разрывных критериев типа уровня обеспеченности;
- Предложен и теоретически обоснован итерационный процесс поиска исходных состояний в многошаговой балансовой модели каскада водохранилищ, что позволило обосновать вариантный расчет траекторий модели;
- Разработана диалоговая итеративная человеко-машинная процедура решения задач многокритериальной оптимизации («Метод наследуемого решения»), не требующая решения задач глобальной оптимизации свертки критериев на отдельных итерациях.

1.5 Теоретическая и практическая ценность работы

Теоретическая ценность работы состоит в том, что

- предложены и изучены численные методы аппроксимации границы Парето, основанные на идее «стартовой площадки» и пригодные для многошаговых моделей с разрывными многоэкстремальными критериями типа уровня обеспеченности;
- изучена устойчивость границы Парето в задачах с критериями типа уровня обеспеченности;
- теоретически обоснована сходимость итерационного процесса поиска исходных состояний в многошаговой балансовой модели каскада водохранилищ.

Практическая ценность состоит в том, что

- реализована методика многокритериальной оптимизации правил управления многошаговой системой с критериями типа уровня обеспеченности, основанная на визуализации границы Парето;
- разработана математическая модель правила согласованного управления каскадом водохранилищ, которая интегрирована в балансовую модель каскада;
- разработаны новые численные методы оптимизации разрывных многоэкстремальных критериев типа уровня обеспеченности и их сверток, основанные на использовании вспомогательных функций специального вида;
- на основе предложенной методики разработано программное обеспечение персональных компьютеров и многопроцессорных систем на языке программирования C++;
- разработанная методика применена для решения задачи многокритериальной оптимизации правил управления Ангарским каскадом водохранилищ, включая регулирование уровня озера Байкал.

1.6 Апробация работы

Результаты диссертации представлялись на следующих научно-исследовательских семинарах и конференциях:

- На V Московской международной конференции по исследованию операций, Москва, 2007;
- На IV Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование развивающейся экономики и экологии» (ЭКОМОД-2009), Киров, 2009;
- На VI Московской международной конференции по исследованию операций, Москва, 2010;
- На V Международной конференции "Параллельные вычисления и задачи управления" (PACO’2010), Москва, 2010;

- На II Международной конференции «Оптимизация и приложения» (2nd International Conference ‘Optimization and Applications’ (Optima-2011)), Petrovac, Montenegro, 2011;
- На VI Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование развивающейся экономики и экологии» (ЭКОМОД-2011), Киров, 2011;
- На Всероссийской научной конференции «Вода и водные ресурсы: системообразующие функции в природе и экономике», Цимлянск, 2012;
- На VII Московской международной конференции по исследованию операций, Москва, 2013;
- На VII Международной конференции «Оптимизация и приложения» (7th International Conference ‘Optimization and Applications’ (Optima-2016)), Petrovac, Montenegro, 2016;
- На VIII Московской международной конференции по исследованию операций, Москва, 2016;
- На IX Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование развивающейся экономики и экологии» (ЭКОМОД-2016), Киров, 2016;
- На IX Международной конференции «Численная геометрия и научные вычисления» (9th International Conference NUMGRID 2018), Москва, 2018;
- На XI Международной конференции «Оптимизация и приложения» (11^{th} International Conference ‘Optimization and Applications’ (Optima-2020)), Москва, 2020.
- Научных семинарах в ВЦ им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.

Полученные результаты использовались в работах, проводимых в рамках проектов РФФИ (№ 07-01-00472, 10-01-00199, 13-01-00235, 17-29-05108).

1.7 Публикации

По теме диссертации опубликовано 24 печатные работы, в том числе 10 работ – в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК. В международные базы (Web of Science, Scopus) включены 7 работ.

1.8 Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Текст работы изложен на 195 страницах, 82 рис., 18 таблиц. Список литературы включает 117 наименований.

2 Краткое содержание работы

Во Введении дана постановка задачи МКО и описана специфика изучаемой задачи оптимизации правил управления. В задаче МКО предполагается, что задано некоторое множество допустимых решений $X \subset R^n$ и отображение $f : R^n \to R^m$ решений в пространство критериев R^m, задающее вектор критериев *y*. Для определенности предполагается, что желательным является уменьшение значения каждого из частных критериев $y_j=f_j(x)$, $j=1,\dots,m$, при фиксированных значениях остальных критериев. Тогда решение $x^{(2)} \in X$ доминирует $x^{(1)} \in X$ по Парето, если $f_i(x^{(2)}) \le f_i(x^{(1)}), i = 1,\dots,m$, и $f(x^{(2)}) \ne f(x^{(1)})$. Решение $x^{(1)} \in X$ называется эффективным по Парето, если не существует решения $x^{(2)} \in X$, доминирующего $x^{(1)}$ по Парето. Соответствующая критериальная точка $y^1= f(x^{(1)})$ называется недоминируемой (оптимальной по Парето), а множество всех недоминируемых критериальных точек – границей Парето множества достижимых критериальных векторов $Y = f(X)$ и обозначается через $P(Y)$. Множество решений, эффективных по Парето, является прообразом $P(Y)$ и обозначается через $P(X)$. Предполагаем, что для любого y из Y имеет место: либо y принадлежит $P(Y)$, либо найдется y^0 из $P(Y)$, доминирующий y по Парето, для чего достаточно компактности Y. Тогда ЛПР должен выбрать единственное предпочтительное решение $P(X)$.

Одним из наиболее эффективных способов информирования ЛПР о границе Парето является ее визуализация. Идея компьютерной визуализации границы Парето при нескольких критериях выбора была сформулирована в уже упомянутых работах Н.Н. Моисеева и Г.С. Поспелова, где указывалось, что визуализация границы Парето помогает оценить реализуемые сочетания значений критериев и выявить связь между ними на этой границе (критериальные замещения). В методе диалоговых карт решений (Лотов и др., 1997), применяемом в данной диссертации, информирование ЛПР о границе Парето происходит на основе ее визуализации, причем вместо аппроксимации $P(Y)$ непосредственно осуществляется аппроксимация множества $Y^* = Y + R^m_+$, где R^m_+ – неотрицательный конус пространства R^m. Преимущество аппроксимации множества Y^*, называемого оболочкой Эджворта-Парето (ОЭП) множества Y, состоит, прежде всего, в том, что множество Y^* обычно устойчиво к возмущениям параметров задачи МКО, в отличие от множества $P(Y)$, которое часто неустойчиво по отношению к таким возмущениям. В то же время, имеет место $P(Y^*) = P(Y)$, благодаря чему визуализация ОЭП позволяет получить информацию о множестве $P(Y)$. Наличие аппроксимации ОЭП позволяет быстро рассчитывать и изображать на дисплее по требованию ЛПР всевозможные наборы двумерных сечений ОЭП. Наложение двумерных сечений ОЭП при изменении некоторого «третьего» критерия дает карту решений, которую можно анимировать и использовать для оценки влияния остальных критериев. На основе изучения границы Парето ЛПР осознанно выбирает предпочтительное достижимое сочетание значений критериев (достижимую цель), а расчет (или поиск) соответствующего решения из $P(X)$ осуществляется компьютером.

Главная сложность при использовании описанного подхода состоит в построении внутренней аппроксимации ОЭП, которая в невыпуклом случае строится в виде $T^* = \{y + R^m_+ : y \in T\}$, где T – конечная совокупность точек множества Y (база аппроксимации). Отметим, что хотя для построения T целесообразно использовать методы, непосредственно направленные на аппроксимацию ОЭП, для решения этой задачи можно также использовать методы построения (или аппроксимации) точек границы Парето.

Далее во Введении дается краткий обзор основных подходов к аппроксимации ОЭП и границы Парето в нелинейных невыпуклых задачах МКО. Теоретически наиболее обоснованными являются методы неравномерного покрытия, предназначенные для достаточно малых значений числа переменных и констант Липшица в функциях, используемых в модели. В случае моделей с большим числом переменных широкое распространение получили методы, основанные на решении задач глобальной оптимизации сверток (скалярных функций) критериев. Методы случайного поиска основаны на расчете критериальных векторов для случайных точек допустимого множества и предназначены для задач малой размерности.

Развивающие их многофазные методы дополняют случайный поиск оптимизацией и переносят, таким образом, идеи метода мультистарта на многокритериальный случай. В XXI веке широкое распространение получили эволюционные методы аппроксимации границы Парето.

Для обсуждения возможности использования существующих методов для решения прикладной задачи, изучаемой в диссертации, рассмотрим блок-схему расчета критериев типа уровня обеспеченности, которая иллюстрирует главные особенности этой задачи (см. рис. 1).

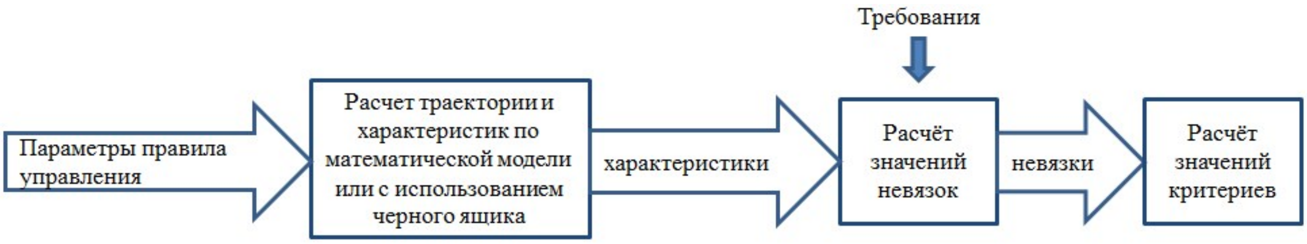

Рис. 1 Блок-схема расчета критериев

Параметры правил управления изучаемой многошаговой динамической системы являются входной информацией блока расчета траектории системы, на основе которой строятся характеристики, используемые при расчете значений критериев. Блок расчета траектории рассматривается как черный ящик, информация о его структуре не используется в предлагаемых методах, в которых основное внимание уделяется критериям типа обеспеченности выполнения требований к характеристикам.

Простейшим примером критерия типа уровня обеспеченности, используемого в задаче управления каскадом водохранилищ, является доля шагов, на которых имеет место недопроизводство электроэнергии на гидроэлектростанции *i*-ого водохранилища:

$$y_N^i = \frac{1}{t_0}\sum_{t=1}^{t_0}\Theta(z_N^{i,t}), \quad i = 1,\ldots,n_0, \tag{1}$$

где $\Theta(z)$ – функция Хэвисайда, равная нулю при $z \le 0$ и единице при $z > 0$, $z_N^{i,t} = N_i^* - N_i^t$ – невязка требования к выработке электроэнергии на *i*-ой ГЭС на шаге *t*, N_i^* – требование, N_i^t – фактическая выработка на шаге *t*, t_0 – общее число шагов. Ясно, что такой критерий принимает дискретный набор значений в диапазоне от 0 до 1, а его значение желательно уменьшать. Как уже говорилось, сложность рассматриваемой задачи аппроксимации ОЭП связана, прежде всего, с тем, что такие критерии типа являются разрывными функциями параметров правила управления с большим числом разрывов, равным числу шагов в модели динамической системы (несколько тысяч), и принимают конечное, но достаточно большое число значений, причем являются постоянными в окрестностях точек непрерывности.

Характерный пример графика такого критерия в задаче выбора правила управления Ангарским каскадом приведен на рис. 2, где отображено изменение критерия «Доля перебоев в выработке электроэнергии на Братской ГЭС» вдоль случайно выбранного одномерного отрезка пространства решений. Ясно видны подмножества постоянности критерия и наличие многочисленных экстремумов. Свертки (функции) критериев, которые требуется оптимизировать в методах аппроксимации ОЭП, имеют еще более сложных характер. Далее во Введении кратко рассматривается задача построения правил управления Ангарским каскадом. Число параметров правил управления в этой задаче превышает 300, а число критериев выбора решения равно 24. При этом требуется аппроксимировать ОЭП с точностью в 1%, причем затраты вычислительных ресурсов, измеряемые числом расчетов вектора критериев, не должны превосходить 10-15 миллионов. Последнее связано с тем, что задачу аппроксимации ОЭП потребуется решать многократно, а также то, что вместо рассматриваемого в данной работе периода в 103 года планируется использовать ряды приточности в 10 000 лет. В связи с этим, из всех методов, описанных в обзоре, в данном случае оказываются потенциально пригодными два подхода – градиентные методы локальной оптимизации сверток на основе использования вспомогательных сглаженных функций и эволюционные методы. В диссертации описаны эксперименты, которые показывают, что в рассматриваемой задаче такие подходы также не приводят к построению аппроксимации ОЭП с требуемыми затратами вычислительных ресурсов и точностью. Поэтому в диссертации потребовалось разработать новые методы.

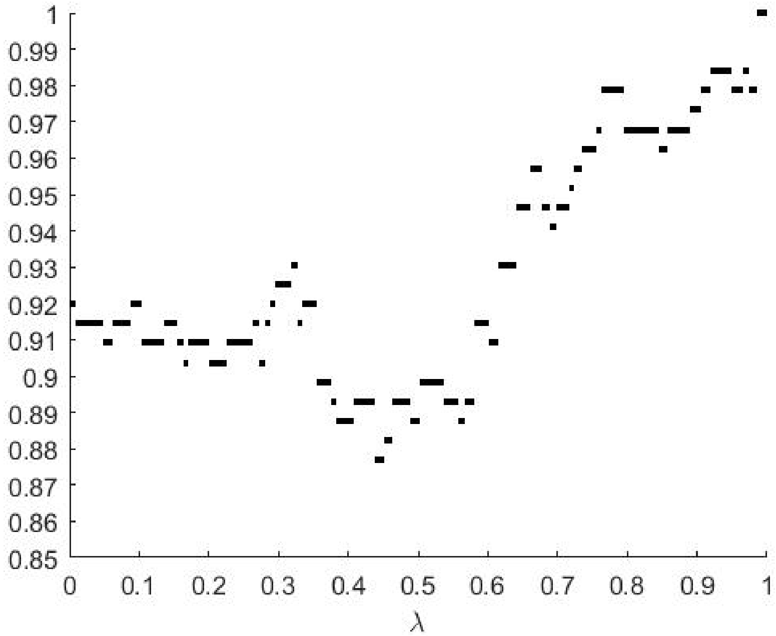

Рис. 2 Изменение критерия вдоль случайно выбранного отрезка пространства параметров

В гл. 1 рассматривается задача построения правил управления каскадом водохранилищ реки Ангара, включающего озеро Байкал. В разделе 1.1 показывается противоречивость требований, выдвигаемых к правилам управления Ангарским каскадом водохранилищ.

В разделе 1.2 приводится описание многошаговой модели каскада водохранилищ, расположенных в основном русле реки. Пусть i – номер водохранилища, $i = 1,...,n_0$, интервал времени t начинается в момент $t-1$ и заканчивается в момент t, $t = 1,2,...$, модель каскада рассматривается на отрезке времени продолжительностью в P_0 лет, причем каждый год разбивается на I интервалов различной продолжительности. Общее число интервалов составляет $t_0 = I \cdot P_0$. Основой модели является балансовое соотношение

$$W_i^t = W_i^{t-1} + Q_i^t + R_{i-1}^t - R_i^t, i = 2,...,n_0, t = 1,...,t_0, \quad (2)$$

связывающее изменение объема воды W_i^t в *i-м* водохранилище за интервал t с величинами попуска R_i^t, его боковой приточности Q_i^t, а также попуска R_{i-1}^t водохранилища, лежащего выше по течению. Модель также включает батиметрические функции, т.е. табличные формулы расчета уровней водохранилищ H_i^t по объему воды W_i^t, а также нелинейные зависимости производства электроэнергии от уровня H_i^t и попуска R_i^t водохранилища и другие показатели.

В разделе 1.2. представляются в математической форме правила попуска воды через плотины для каскада в целом. В работе величина попуска R_i^t, определяемая в момент t-1, зависит от W_i^{t-1}, $\hat{Q}_i^t$ и R_{i-1}^t и представляется некоторым алгоритмом

$$R_i^t = \begin{cases} U_{\tau(t)}^i(W_i^{t-1} + \hat{Q}_i^t),\ i = 1,\ t = 1,...,t_0 \\ U_{\tau(t)}^i(W_i^{t-1} + \hat{Q}_i^t + R_{i-1}^t),\ i = 2,...,n_0,\ t = 1,...,t_0 \end{cases}. \qquad (3)$$

Здесь $\hat{Q}_i^t$ прогноз боковой приточности на ближайший интервал времени. Первая строка (i=1) относится к озеру Байкал. Исследуются некоторые свойства этого алгоритма, в частности, непрерывность и монотонность по входным данным и параметрам правил (3). Модель используется для того, чтобы по значениям параметров рассчитать траекторию системы на продолжительный период времени (т.е. объемы W_i^t для $t = 1,...,t_0$), а по ней найти значения тех характеристик, для которых имеются требования, а затем и критериев (см. рис. 1).

В разделе 1.3 рассматривается проблема расчета траектории системы на основе (2) и (3) в условиях неопределенности в начальных объемах воды W_i^0 и приточности Q_i^t. Проблема с приточностью решается на основе задания некоторого сценария, который строится на основе обработки наблюдений и некоторых предположений. Такая методика может быть использована и для анализа последствий изменения климата, реализованных в виде сценария приточности.

Основное внимание в разделе уделяется проблеме поиска подходящих начальных объемов воды в водохранилищах W_i^0. Проблема состоит в том, что различие начальных и конечных объемов на траектории, построенной для заданных параметров правил попуска (3), означает использование дополнительного водного ресурса (или его экономию) и делает различные варианты параметров несравнимыми. Поэтому для водохранилища с номером i_0 требуется найти такую величину W_i^0, чтобы |h(W_i^0)-W_i^0|<ε, где $W_{i_0}^{t_0} = h_{i_0}(W_{i_0}^0)$– зависимость конечного объема воды от начального объема в соответствии с моделью (2) при заданных параметрах правил и величинах попуска $R_{i_0-1}^t$, $t = 1,...,t_0$. Для решения этой задачи предлагается итеративный процесс $w_k = h_{i_0}(w_{k-1})$, k=1,2…., с произвольной величиной $w_0 \ge 0$. Если для очередного k имеем $|w_k - w_{k-1}| < \varepsilon$, расчет завершается, в противном случае начинаем новую итерацию. Для доказательства сходимости процесса рассматривается отображение $\varphi: R_+ \to R_+$ и семейство последовательностей $\{x_k\}_{k=0}^{+\infty}$, порождаемых $x_0 \in R^+$ согласно

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), k = 0,1,.... \qquad (4)$$

Теорема 1.3.1 (о сходимости). *Пусть* $\varphi(\cdot)$– *непрерывная функция, не убывающая по своему аргументу. Для того чтобы последовательность* $\{x_k\}_{k=0}^{+\infty}$ *для любого* $x_0 \in R_+$ *сходилась к некоторой (может быть, зависящей от* x_0*) неподвижной точке* x_* *отображения (4), необходимо и достаточно, чтобы множество* $B = \{x \in R_+ \mid \varphi(x) > x\}$ *имело следующее свойство: для любого числа* $y \ge 0$ *полубесконечный отрезок* $[y, +\infty)$ *не принадлежит* B.

Доказанное утверждение обосновывает итеративный процесс $w_k = h_{i_0}(w_{k-1})$, k=1,2…., при выполнении следующего условия.

Условие безопасности правил попуска. Будем говорить, что для правила управления (3) выполняется условие безопасности, если для любого момента времени $\xi \in \{1, I+1, ..., I \cdot (P_0 - 1) + 1\}$ и для любых физически возможных $Q_{i_0}^t$ и $R_{i_0-1}^t$, найдется такой зависящий от момента ξ объем водохранилища $\hat{W}_{i_0}(\xi)$, что при всех $W_{i_0}^{\xi-1} \geq \hat{W}_{i_0}(\xi)$ выполнено неравенство

$$\sum_{t=\xi}^{\xi+I-1} R_{i_0}^t \geq \sum_{t=\xi}^{\xi+I-1} \left\{ R_{i_0-1}^t + Q_{i_0}^t \right\}. \tag{5}$$

Сформулированное условие должно обеспечивать безопасную эксплуатацию водохранилища, не допуская его переполнения при всех физически возможных $Q_{i_0}^t$ и $R_{i_0-1}^t$.

Теорема 1.3.2. Если для правила управления выполняется условие (5), то при любом $w_0 \geq 0$ последовательность $w_k = h_{i_0}(w_{k-1}), k = 1, 2, ...$ сходится к неподвижной точке $h_{i_0}(\cdot)$.

В разделе 1.4 формулируются критерии, используемые при выборе параметров правил управления водохранилищами Ангарского каскада. Были использованы 24 критерия типа (1), каждый из которых связан с определенным требованием. Так, критерии Иркутского водохранилища связаны с нарушением требований к уровню Байкала, к минимальному и максимальному попуску воды через плотину, к производству электроэнергии на Иркутской ГЭС, обеспечению работоспособности водозаборов и т.д. Аналогичные критерии формулируются для Братского и Усть-Илимского водохранилищ, для которых, кроме того, добавлены транспортные требования к глубине фарватера. В разделе 1.4 также рассмотрены альтернативные критерии, характеризующие годовую обеспеченность требований, т.е. имеющие смысл доли лет, в течение которых требования выполняются. Такие критерии являются усложненным вариантом критериев (1).

В разделе 1.5 дается общая формулировка проблемы многокритериального выбора правил управления в динамической системе, описываемой многошаговой моделью

$$x_t = f(t, x_{t-1}, u_t), t = 1, ..., t_0, \tag{6}$$

где $x_t \in R^n, t = 0, ..., t_0$, – переменная состояния, $u_t \in R^r, t = 1, ..., t_0$, – управление, причем значение u_t задается правилом управления, содержащим параметры:

$$u_t = h\left(t, x_{t-1}, \alpha^t\right), t = 1, ..., t_0, \tag{7}$$

где $h(\cdot,\cdot,\cdot): \{1, ..., t_0\} \times R^n \times \Xi \to R^r$ – заданная вектор-функция, $\alpha = (\alpha^t, t = 1, .., t_0)$ – вектор параметров правила управления, $\alpha \in \Xi \subset R^r$, где Ξ – непустое компактное множество, t_0 – число шагов (достаточно большая величина). Рассматриваются скалярные характеристики (показатели функционирования) $s_t^{(j)}$, значения которых задаются непрерывными функциями

$$s_t^{(j)} = s_t^{(j)}(x_t, u_t), \tag{8}$$

где j – номер характеристики, $j = 1, ..., m_0, t = 1, ..., t_0$. Совокупность требуемых значений j*-го* показателя функционирования задается замкнутым односвязным одномерным множеством (точкой, отрезком или полупрямой) $G_t^{(j)}$. Невязка $z_t^{(j)}$ – это отклонение значения *j-го* показателя функционирования от множества $G_t^{(j)}$, т.е.

$$z_t^{(j)} = \inf\left\{\left|s_t^{(j)} - s\right| : s \in G_t^{(j)}\right\}, \tag{9}$$

Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что *j-й* частный критерий выбора равен доле интервалов (моментов) нарушения требований, т.е. доле интервалов (моментов), при которых $z_t^{(j)} > 0$. Такой критерий y_j имеет вид

$$y_j = \frac{1}{t_0}\sum_{t=1}^{t_0}\Theta(z_t^{(j)}). \tag{10}$$

Критерии (10) являются обобщением критериев, описание которых приведено в разделе 1.4. Поскольку каждый критерий может принимать только конечное число значений, множество достижимых критериальных векторов *Y* конечно и не пусто, поэтому не пусто множество *P(Y)* и имеет место так называемая внешняя устойчивость, т.е. для любого *y* из *Y* имеет место утверждение: либо у принадлежит *P(Y)*, либо найдется y_0 из *P(Y)*, доминирующий *y* по Парето. Рассматривается вопрос об устойчивости множеств $Y(\beta)$, $P(Y(\beta))$ и $Y^*(\beta)$ по отношению к входным данным $\beta \in B$, где B – множество некоторого топологического пространства, причем имеется такая точка $\beta_0 \in \operatorname{int} B$, что $Y = Y(\beta_0)$, $P(Y(\beta)) = P(Y(\beta_0))$ и $Y^*(\beta) = Y^*(\beta_0)$ в случае критериев (10), являющихся разрывными функциями невязок. В связи с конечностью Y для него требуется специфическое определение устойчивости.

Определение. Множество $Y = Y(\beta_0)$ назовем устойчивым по отношению к возмущениям входных данных в точке $\beta_0 \in \operatorname{int} B$, если $Y(\beta) = Y(\beta_0)$ в некоторой отрытой окрестности β_0.

Аналогичным образом определяется устойчивость $P(Y(\beta))$ и $Y^*(\beta)$. Пусть Z – множество достижимых значений векторов невязок (9). Тогда $Y = \psi(Z)$, где $\psi : R^{m_0 t_0} \to R^{m_0}$. Пусть все $K = 2^{m_0 t_0}$ ортантов пространства $R^{m_0 \cdot t_0}$ как-то перенумерованы. Вводятся индикаторные функции $\chi_k(\beta), k = 1,\dots,K$, определенные следующим образом:

- $\chi_k(\beta) = 1$, если множество $Z(\beta)$ имеет непустое пересечение с множеством внутренних точек ортанта номер *k*;
- $\chi_k(\beta) = 0$, если множество $Z(\beta)$ не имеет общих точек с множеством внутренних точек ортанта номер *k*.

Теорема 1.5.1. Достаточным условием устойчивости множества *Y* относительно возмущений входных данных в точке $\beta_0 \in \operatorname{int} B$ является наличие такой открытой окрестности $O(\beta_0)$ точки β_0, что $\chi_k(\beta) = \chi_k(\beta_0), k = 1,\dots,K$, при всех β из $O(\beta_0)$.

Доказанная теорема позволяет выписать различные условия устойчивости множества Y, основанные на достаточных условиях устойчивости отдельных индикаторных функций. Как обычно, устойчивость ОЭП имеет место в случае устойчивости Y. В отличие от общего случая, когда устойчивость Y не влечет устойчивости границы Парето, в данной задаче в связи с дискретностью Y при выполнении условий теоремы $P(Y)$ устойчиво одновременно с $\boldsymbol{Y}$.

В заключительном разделе главы, разделе 1.6, описывается программное обеспечение, реализующее расчет траектории по модели Ангарского каскада.

Глава 2 посвящена методам построения непрерывных вспомогательных функций в задачах оптимизации разрывных критериев типа (1) и их использованию для поиска решения задачи МКО, удовлетворяющего ЛПР. В разделе 2.1 предлагается метод построения вспомогательных функций (метод эрзац-функций), который использует специфику критериев типа (1): функции Хэвисайда $\theta(z_t^{(j)})$ заменяются на непрерывные функции (так называемые эрзац-функции) $\nu_t^{(j)}\left(z_t^{(j)}\right)$. Так, вспомогательная функция для критерия y_j имеет вид

$$c_j = \frac{1}{t_0}\sum_{t=1}^{t_0}\nu_t^{(j)}(z_t^{(j)}).$$

При решении задачи минимизации свертки $\varphi(y_1,...,y_{m_0})$ вспомогательной функцией является $\varphi(c_1,...,c_{m_0})$.

Предлагаемый метод глобальной минимизации критерия y_j типа обеспеченности на множестве Ξ (условно называемый методом эрзац-функций) имеет следующий вид.

1. На Ξ генерируется случайная равномерно распределенная выборка H_N объемом N;
2. Взяв точки из H_N в качестве стартовых, градиентным методом находим множество $H_N^{\min}$ точек локального минимума вспомогательной функции на Ξ;
3. В качестве приближенного решения задачи берется точка, на которой достигается минимум критерия y_j на множестве точек $H_N^{\min}\bigcup H_N$.

Аналогичным образом метод используется в работе для улучшения значения критерия (или свертки критериев) в том случае, когда выбор стартовых точек процессов локальной оптимизации ограничен некоторым подмножеством множества Ξ.

Эффективность использования вспомогательных функций описанного типа была изучена в разделе 2.2, в котором описаны результаты экспериментов со степенной эрзац-функцией $\nu_t^{(j)}\left(z\right) = z^p$. В результате экспериментов с задачей оптимизации правил управления каскадом было получено, что наилучшие результаты достигаются при значениях показателя степенной функции p от 0.5 до 1. При этом удалось найти решения, доставляющие требуемое нулевое значение всех частных критериев, кроме первого («Доля перебоев в уровне озера Байкал»), т.е. для них был найден глобальный минимум. Было показано, что найденное минимальное значение первого критерия не может быть найдено с помощью случайного поиска. В то же время, при минимизации простейшей линейной свертки критериев найденное значение значительно превышало имеющуюся оценку ее минимума, т.е. в задаче оптимизации правил управления каскадом такой метод не позволяет находить решения, близкие к глобальному оптимуму сверток. По-видимому, это связано с наличием слишком большого числа локальных экстремумов свертки.

Результаты экспериментов с методом эрзац-функций показали, что при правильном подборе свертки критериев и стартовых точек процесса ее локальной оптимизации можно значительно улучшить исходные решения. Сказанное выше позволило предложить «Метод наследуемого решения» – диалоговую итеративную человеко-машинную процедуру поиска удовлетворительного решения задач МКО, в которой не требуется на каждой итерации находить глобальный оптимум свертки критериев. В этой процедуре, использующей предложенные вспомогательные функции, на каждой итерации решается достаточно большое число задач локальной оптимизации свертки, причем множество стартовых точек процесса локальной оптимизации берется в окрестности решения, наследуемого с предыдущей итерации. ЛПР, в соответствии со своими предпочтениями, должен менять не только параметры свертки критериев, но и ее вид, который может меняться от итерации к итерации. Поэтому ЛПР в процедуре должен оказать помощь эксперт в области оптимизации.

На предварительном этапе диалоговой процедуры происходит глобальная минимизация частных критериев, ее результаты используются для анализа и структуризации задачи. Учитывая некоторые известные ему из прошлого опыта свойства и допустимые решения рассматриваемой задачи, ЛПР с помощью эксперта формирует некоторое исходное решение α_0 и назначает его некоторую окрестность $O_{r_1}(\alpha_0) \subset \Xi$, а также свертку критериев $\varphi_1(\cdot)$.

Рассмотрим итерацию k основного этапа. Считается, что на предыдущей итерации построено решение $\alpha_{k-1} \in \Xi$ и указана его окрестность $O_{r_k}(\alpha_{k-1}) \subset \Xi$, в которой генерируются случайные начальные точки процесса локальной оптимизации свертки $\varphi_k(\cdot)$.

Шаг 1. С помощью метода эрзац-функций находится решение α_k, для которого $\varphi_k\left(y(\alpha_k)\right) < \varphi_k\left(y(\alpha_{k-1})\right)$. ЛПР сравнивает критериальные векторы в решениях α_k и α_{k-1}. Если α_k оказалось хуже α_{k-1}, ЛПР и эксперт строят альтернативную свертку критериев. При этом могут потребоваться эксперименты с различными свертками. Если решение α_k предпочтительнее решения α_{k-1}, новое решение становится текущим.

Шаг 2. Если значения всех критериев признаны ЛПР удовлетворительными, то работа завершается. В противном случае в качестве свертки критериев следующей итерации $\varphi_{k+1}(\cdot)$ предлагается свертка, способствующая улучшению значений тех критериев, которые имели недостаточно удовлетворительные для ЛПР значения в точке α_k. Кроме того, ЛПР с помощью эксперта должен указать окрестность $O_{r_{k+1}}(\alpha_k) \subset \Xi$, в которой на следующей итерации будут выбираться начальные точки процессов локальной оптимизации. Далее осуществляется переход к следующей итерации.

Отметим, что в предлагаемой процедуре ЛПР имеет возможность возвратиться к любому из решений, полученных на предыдущих итерациях или к выбору иного начального решения.

В разделе 2.4 описывается опыт применения предлагаемой процедуры при выборе правил управления Ангарским каскадом водохранилищ. За 11 итераций процедуры найдено эффективное решение α_{11}, которое позволяет существенно улучшить значения большинства критериев по сравнению с экспертным решением. В разделе 2.5 описывается программное обеспечение, реализующее поиск локальных минимумов свертки с помощью предлагаемой вспомогательной функции.

Глава 3, состоящая из 8 разделов, посвящена новым методам аппроксимации ОЭП для систем с критериями типа (1). В экспериментальном анализе методов, который осуществляется в данной главе, используется задача оптимизации правил управления Ангарским каскадом. В разделе 3.1 описываются результаты экспериментов с методами, разработанными ранее. Изучалось отклонение точки $y(\alpha_{11})$, заведомо принадлежащей ОЭП, от аппроксимации ОЭП, полученной двухфазным методом аппроксимации ОЭП (Лотов и др., 2002) и популярным генетическим алгоритмом аппроксимации границы Парето NSGA-II (Deb, 2001). Эксперименты показали, что ни тот, ни другой не могут аппроксимировать ОЭП в изучаемой задаче с требуемой точностью в 1% за 10-15 миллионов расчетов вектора критериев. Для двухфазного метода оказалось, что отклонение имеет порядок значений критериев в точке α_{11}, поэтому граница полученной аппроксимации не дает представления об истинной границе Парето. В случае генетического алгоритма была экспериментально найдена приближенная асимптотическая формула зависимости отклонения от числа итераций

$$\delta = 10^2 k^{-1}, \qquad (11)$$

из которой следует, что для достижения требуемого отклонения генетическому алгоритму понадобится около 220 миллионов расчетов вектора критериев, что не подходит для решения задачи оптимизации правил управления.

Методы, предлагаемые в главе 3, являются вариантами метода стартовой площадки, позволившего решить описанную проблему. В главе 2 было экспериментально показано, что можно найти стартовые точки процедур локальной оптимизации сверток критериев, принадлежащие области притяжения таких локальных экстремумов, дающих эффективные решения. Множество точек, обладающих таким свойством, в работе называется стартовой площадкой, а методы, основанные на ее построении и использовании – методами стартовой площадки (МСП). МСП состоит из двух основных шагов: 1) построения стартовой площадки и 2) выполнения итерационной процедуры улучшения аппроксимации ОЭП с использованием градиентных методов локальной оптимизации вспомогательных функций, стартующих из случайных точек стартовой площадки. Варианты МСП могут отличаться как способом построения стартовой площадки, так и градиентными методами. Здесь в качестве метода поиска локальных оптимумов использован метод сопряженного градиента с оптимизацией шага.

В разделе 3.2 описывается метод инжекции оптимумов (ИО), используемый в разделе 3.3 для построения стартовой площадки. Метод состоит из двух шагов. На первом шаге с помощью метода скалярного мультистарта, применяемого к вспомогательным функциям, приближенно находится множество глобальных оптимумов частных критериев X_y, а на втором – модифицированный генетический алгоритм NSGA-II строит стартовую площадку X_{lp}. Модификация алгоритма NSGA-II состоит в периодическом включении в популяцию генетического алгоритма множества X_y и в использовании нового правила остановки процесса аппроксимации. Таким образом, в методе ИО осуществляется гибридизация градиентной и генетической оптимизации, но, в отличие от большинства работ в этой области, градиентная и генетическая оптимизация разделены, что обеспечивает простоту варьирования как генетических, так и градиентных методов в зависимости от решаемой задачи. Надо отметить, что подобная идея была высказана в диссертационной работе Д. Шаффера (1980), но реализовать ее в виде эффективного метода до сих пор не удавалось (Du and Swamy, 2016).

Эксперименты продемонстрировали, что метод ИО можно также использовать для грубой аппроксимации ОЭП, взяв в качестве прообраза аппроксимации недоминируемые точки множества $X_y \cup X_{lp}$. При этом для того, чтобы отклонение критериальной точки, порождаемой решением α_{11}, было меньше 1%, методу ИО требуется в 6 раз меньшее число расчетов критериальной функции, чем генетическому алгоритму NSGA-II (около 33 миллионов), причем преимущество метода ИО возрастает с ростом точности. Для непосредственного сравнения баз аппроксимаций, построенных NSGA-II (T_{nsga}) и ИО (T_{eim}), использован метод функций включения. Функция включения для баз аппроксимации A и B при $\varepsilon \geq 0$ задается формулой:

$$\nu_A(\varepsilon, B^*) = \frac{1}{\text{card } A} \sum_{i=1}^{\text{card } A} \delta(\varepsilon, a^i), \text{ где } \delta(\varepsilon, a^i) = \begin{cases} 1, & a^i \in (B^*)_\varepsilon \\ 0, & a^i \notin (B^*)_\varepsilon \end{cases}, \ a^i \in A, \tag{12}$$

т.е. $\nu_A(\varepsilon, B^*)$ – доля точек базы A, попавших в ε-окрестность множества B^*. На рис. 3 видно, что доля точек базы T_{eim}, принадлежащих любой ε-окрестности множества T^*_{nsga}, значительно меньше доли точек T_{nsga}, принадлежащих ε-окрестности множества T^*_{eim}. При этом множество T^*_{eim} содержит 70% точек T_{nsga}, а ε-окрестность T^*_{eim} уже при ε=0.003 содержит более 95% точек T_{nsga}. Это означает, что точки T_{nsga} сконцентрированы в окрестности множества T^*_{eim}. Наоборот, T^*_{nsga} не содержит точек T_{eim}, а в 0.03-окрестности T^*_{nsga} содержится не более 20% точек T_{eim}, т.е. точки T_{eim} далеки от T^*_{nsga}.

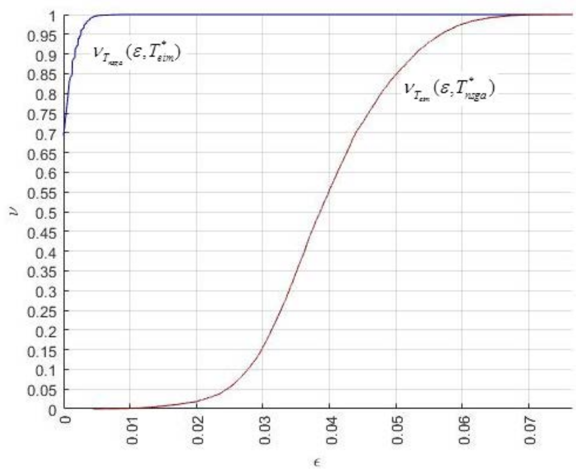

Рис. 3 Графики функций включения $\nu_{T_{nsga}}(\varepsilon, T^*_{eim})$ и $\nu_{T_{eim}}(\varepsilon, T^*_{nsga})$

Показано, что в асимптотике для отклонения аппроксимации ОЭП, построенной методом ИО, от образа точки α_{11}, имеет место $\delta = 10^5 k^{-2}$. Этим метод ИО также превосходит NSGA-II.

Раздел 3.3 посвящен реализации МСП, в которой в качестве средства построения стартовой площадки используется метод ИО. Основное внимание уделяется используемой на втором шаге МСП итерационной процедуре улучшения аппроксимации ОЭП с использованием градиентных методов локальной оптимизации вспомогательных функций, стартующих из случайных точек стартовой площадки. Перед его началом должны быть заданы множество оптимумов X_y, стартовая площадка X_{lp}, объём случайной выборки точек, параметр ε_0 правила остановки, а также используемое параметрическое семейство сверток критериев. Рассмотрим итерацию этого шага.

Итерация k, где $k \ge 1$. Считается, что на предыдущих итерациях процедуры уже построено множество решений H_{k-1}, причем в качестве H_0 берется множество X_y.

1) С использованием вспомогательных функций и градиентных методов для каждой точки случайной равномерной выборки из множества X_{lp} осуществляется решение задачи локальной оптимизации адаптивно выбранной свертки. Пусть X_2 – множество решений;
2) Проверяется условие остановки алгоритма, например, максимальное отклонение $y(X_2)$ от $T_{k-1} = y\left(H_{k-1}\right)$ не должно превышать ε_0;
3) Множество H_k строится путем исключения доминируемых решений $H_{k-1} \cup X_2$;
4) Если условие остановки алгоритма выполняется, положим $X_{opt} = H_k$ и $T_{opt} = y(X_{opt})$, а также строим совокупность $\hat{X}_{opt}$ недоминируемых решений множества $X_{opt} \cup X_{lp} \cup X_y$ и соответствующую базу аппроксимации $\hat{T}_{opt} = y(\hat{X}_{opt})$. В противном случае переходим к следующей итерации.

Далее приводится теоретическое исследование идеализированного варианта МСП, в рамках которого для построения стартовой площадки используется метод ИО, включающий идеализированный генетический алгоритм, ставящий *случайным образом* в соответствие конечному подмножеству из N_{eim} точек Ξ конечное подмножество точек из того же множества. Пусть $\Lambda_{N_{eim}}$ – совокупность всех подмножеств множества Ξ, состоящих из m_0 точек множества X_y и $(N_{eim} - m_0)$ произвольных точек множества Ξ. Пусть $\Theta_{N_{eim}}$ – совокупность всех множеств $X_{lp} \subset \Xi$, которые можно получить с помощью генетического алгоритма из множеств $\Lambda_{N_{eim}}$. Тогда генетический алгоритм является стохастическим отображением $G: \Lambda_{N_{eim}} \to \Theta_{N_{eim}}$. Обозначим $X' = \bigcup_{X_{lp} \in \Theta_{N_{eim}}} X_{lp}$. Пусть одно из множеств $\Lambda_{N_{eim}}$ выбирается случайно. Множество X_{lp}, реализовавшееся с помощью отображения *G*, используется на втором шаге МСП в качестве стартовой площадки для построения базы T аппроксимации T^* множества Y^*.

Предположение 3.1. На множестве $X' \subseteq \Xi$, построенном выше описанным образом, существуют σ–алгебра $B(X')$ и вероятностная мера $\mu(X')$, характеризующая вероятность получения измеримых подмножеств X'.

Предложенное понятие идеализированного МСП и сделанное предположение позволили перенести на второй шаг МСП часть результатов, полученных (Каменев, 2013) для двухфазного метода. Пусть $Y^{\Phi} = f(\Phi(X'))$, $f^{-1}(y)$ – полный прообраз $y \in Y^{\Phi}$ и $\Phi^{-1}(x)$ – полный прообраз точки x, принадлежащей $\Phi(X')$. Предполагается, что множество

$$\Phi^{-1}(f^{-1}(T^* \cap Y^{\Phi}) \cap \Phi(X')) \qquad (13)$$

измеримо и, кроме того,

$$P(X) \subset \Phi(X'). \qquad (14)$$

Рассматриваются оптимизационная полнота $\eta_{\Phi}(T,\varepsilon)$, т.е. вероятность попадания точки $y = y\left(\Phi\left(\alpha^0\right)\right)$ в ε–окрестность множества T^* при распределении точек α^0 на X_{lp} в соответствии с $\mu(X')$, и выборочная оптимизационная полнота $\eta_{\Phi}^{N_{opt}}(T,\varepsilon)$, используемая в правиле остановки второго шага МСП. Тогда для достаточно больших N_{opt} имеют место

Теорема 3.3.1. Пусть выполняется Предположение 3.1, множество (13) измеримо. Тогда для любого $\beta > 0$ справедлива вероятностная оценка

$$\mathrm{P}(\eta_{\Phi}(T,\varepsilon) > \eta_{\Phi}^{N_{opt}}(T,\varepsilon) - \beta) \geq 1 - \exp(-2N_{opt}\beta^2)\,. \tag{15}$$

Теорема 3.3.2. Пусть выполняются условия Теоремы 3.3.1 и, кроме того, выполняется (14). Тогда для любого $\varepsilon_0 > 0$ найдется такой номер итерации $K(\varepsilon_0)$, что $\varepsilon_{\max}^{K(\varepsilon_0)} \leq \varepsilon_0$, причем для любого $\eta \in (0,1)$ имеет место вероятностная оценка

$$\mathrm{P}(\eta_{\Phi}(T_{K(\varepsilon_0)},\varepsilon_0) > \eta) \geq 1 - \exp(-2N_{opt}(1-\eta)^2)\,, \tag{16}$$

где $T_{K(\varepsilon_0)}$ – совокупность точек базы аппроксимации после выполнения итерации $K(\varepsilon_0)$.

Далее в разделе 3.3 приводятся результаты экспериментального изучения МСП, которому потребовалось менее 18 миллионов расчетов критериальной функции для достижения отклонения вектора критериев решения α_{11} от аппроксимации ОЭП в 1%. Таким образом, МСП многократно превосходит алгоритм NSGA-II по этому показателю. Сравнение на основе функций включения (12) подтверждает этот вывод. По отклонению вектора критериев решения α_{11} от аппроксимации ОЭП, построенной методом ИО менее чем за 18 миллионов расчетов, МСП превосходит ИО примерно в шесть раз. Сравнение на основе функций включения (12), тем не менее, показывает, что только малая часть точек базы аппроксимации, построенной с помощью МСП, сильно улучшает аппроксимацию, остальные точки базы лежат внутри аппроксимации, построенной методом ИО. Таким образом, хотя задача аппроксимации ОЭП для модели управления Ангарским каскадом была решена с требуемой точностью 1% с затратой 18 миллионов расчетов критериальной функции, МСП уступает ИО по качеству большинства точек базы аппроксимации. В связи с этим в разделе 3.4 предлагается дополненный вариант МСП (ДМСП), который основан на дополнительном применении генетического метода к множеству решений, построенных методом МСП.

ДМСП состоит из двух шагов, на первом из которых выполняется МСП, на котором строятся множества решений X_{opt} и $\hat{X}_{opt}$. На втором шаге выполняются итерации генетического алгоритма NSGA-II. Заранее должны быть заданы параметры: желаемое число точек в выходном множестве этого шага и число итераций алгоритма. В качестве начальной популяции NSGA-II берется либо множество $\hat{X}_{opt}$, либо множество решений X_{opt}, дополненное случайными точками из множества Ξ. Эксперименты показывают, что при перенесении части ресурса (т.е. измерений критериальной функции) с генетического шага метода ИО на второй шаг ДМСП качество аппроксимации резко улучшается. При этом ДМСП превосходит как МСП, так и метод ИО, что видно при сравнении баз аппроксимации на основе функций включения (12). Таким образом, применение генетического алгоритма после процедуры многокритериального мультистарта, использующего метод эрзац-функций, значительно улучшает качество аппроксимации. Так же, как и в случаях алгоритма NSGA-II и метода ИО, была изучена асимптотика отклонения критериального образа решения α_{11} от построенной аппроксимации ОЭП. Она оказалась обратно пропорциональной кубу числа итераций третьего шага ДМСП, точнее $\delta = 10^7 k^{-3}$. Таким образом, отклонение имеет разные порядки асимптотической сходимости для методов NSGA-II, ИО и ДМСП.

В разделе 3.5 рассматривается задача аппроксимации ОЭП для альтернативных критериев – критериев годовой обеспеченности $\mu_j(\cdot)$, j=1,…,m_0, требований к управлению попуском водохранилищ Ангарского каскада, которая равна доле лет без нарушения требований. Эти критерии требуется максимизировать, в отличие от критериев типа доли перебоев $y_j(\cdot)$, j=1,…,m_0, рассмотренных в предыдущих разделах главы. Для аппроксимации ОЭП используются варианты МСП и ДМСП, отличающиеся от описанных ранее тем, что теперь в качестве стартовой площадки берется совокупности решений, полученных для критериев $y_j(\cdot)$, j=1,…,m_0, в разделе 3.4. Точнее, из этой совокупности исключаются решения, доминируемые в смысле новых критериев $\mu_j(\cdot)$, j=1,…,m_0. Прежде всего, в разделе 3.5 оценивается качество базы аппроксимации, порождаемой самой стартовой площадкой. Для этого порождаемая ею аппроксимация ОЭП сравнивается с аппроксимациями, полученными методом ИО для критериев годовой обеспеченности с 100, 200,…, 800 итерациями второго шага. Оказывается, что аппроксимация ОЭП, порожденная стартовой площадкой и полученная практически бесплатно, лучше аппроксимаций, полученных на первых 400 итерациях метода ИО, но уступает аппроксимациям, полученным начиная с 600-й итерации.

Далее дается теоретическое обоснование полученного эффекта: доказывается теорема о связи величин критериев $\mu_j(\cdot)$ и $y_j(\cdot)$, j=1,…,m_0, в этих двух задачах МКО. Пусть решения из множества Ξ выбираются случайно. Точнее, пусть тройка (Ξ, B_Ξ, P_Ξ) задает вероятностное пространство, где B_Ξ – борелевская σ-алгебра на множестве Ξ, $P: B_\Xi \to R_+$ – вероятностная мера, заданная на B_Ξ. Множество Ξ для простоты будем считать многомерным гиперкубом и будем предполагать, что функции $z_t^{(j)}(\cdot), t = 1,...,t_0,\ j = 1,...,m_0$, непрерывны на Ξ.

Теорема 3.5.1. Для любых d_1, d_2, таких, что $0 \le d_1 < d_2 < 1 - \dfrac{I}{t_0}$, выполняется неравенство

$$E\left(\mu_j \mid y_j = d_1\right) > E\left(\mu_j \mid y_j = d_2\right).$$

Эта теорема говорит о том, что, если переход от одного допустимого решения к другому приводит к уменьшению величины y_j, то в среднем можно ожидать, что величина μ_j увеличится. Таким образом, мы можем ожидать, что уменьшение значения критерия y_j в среднем приведет к увеличению значения критерия μ_j. Именно поэтому для аппроксимации ОЭП в задаче с критериями годовой обеспеченности в качестве стартовой площадки можно взять совокупность недоминируемых решений, полученных при аппроксимации ОЭП для исходного набора критериев. Этот факт подтверждается экспериментом, в котором МСП находит относительно порядка сотни критериальных точек, качественно улучшающих аппроксимацию. Далее описывается ДМСП, с помощью которого на основе стартовой площадки получены тысячи недоминируемых критериальных точек базы аппроксимации, качественно превосходящие критериальные точки, порожденные стартовой площадкой. Эксперимент показал, что этот вариант ДМСП значительно превосходит метод ИО по качеству построенной аппроксимации при том же числе расчетов вектора критериев.

В разделе 3.6 кратко описывается применение построенных аппроксимаций ОЭП для визуализации границы Парето в задаче оптимизации правил управления Ангарским каскадом. На основе изучения карт решений (см. рис. 6), полученных с использованием аппроксимации ОЭП в задаче с критериями доли перебоев, найдено решение α^{*}, более предпочтительное чем α_{11}. Далее описан процесс поиска предпочтительного решения задачи с критериями годовой обеспеченности α^{**}, которое доминирует решение α^{*} по критериям годовой обеспеченности и является более предпочтительным, чем решение α_{11}. Наконец, показывается, что можно ввести дополнительный критерий (максимум отклонения от установленного диапазона значений уровня Байкала) для минимизации соответствующего нарушения.

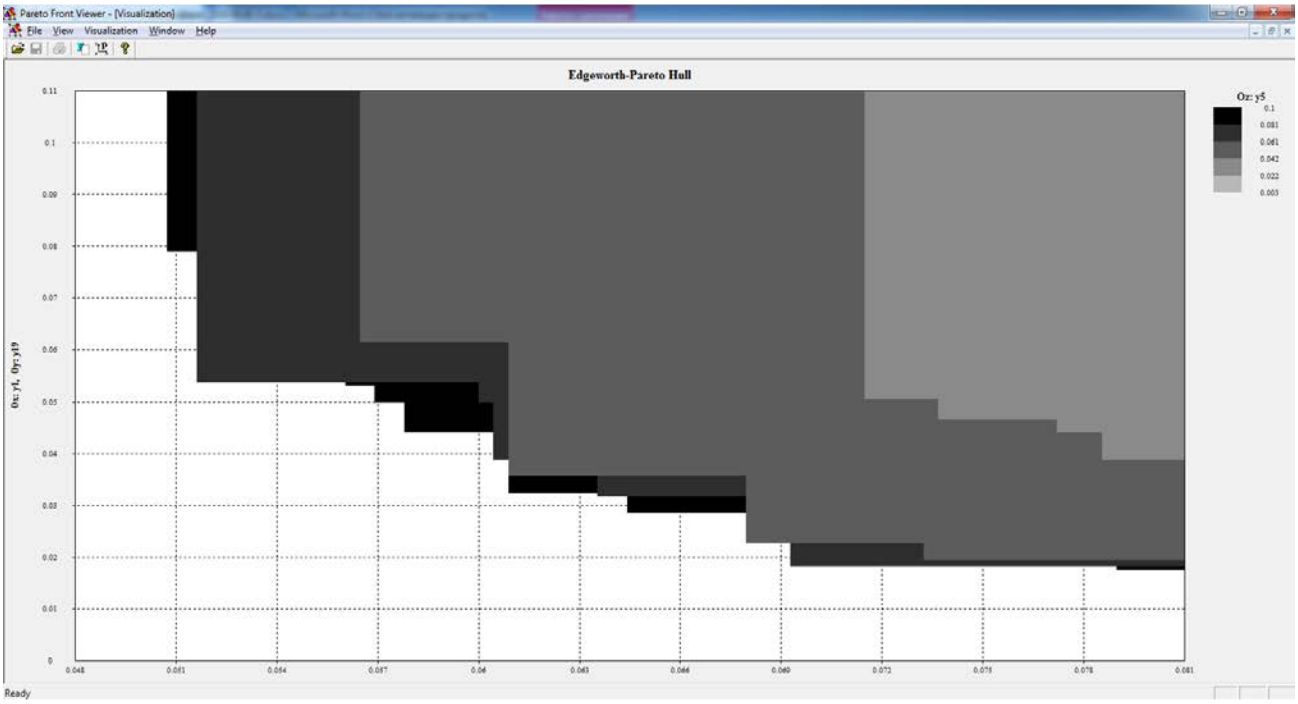

Рис. 6 Черно-белый вариант карты решений для y_1 и y_{19}; значения y_5 даны штриховкой

В разделе 3.7 рассматриваются вопросы, связанные с распараллеливанием методов аппроксимации ОЭП. Описывается подход на основе выделения подмножества операций, которые могут выполняться независимо на отдельных процессорах. Предлагается схема распараллеливания МСП, в которой выделено два таких подмножества:

- генерирование выборки случайных точек и осуществление локальной оптимизации,
- выделение недоминируемых точек из совокупности точек, полученной при решении всех задач локальной оптимизации, и оценка точности аппроксимации.

Программное обеспечение для параллельных вычислений построено на основе *Интерфейса передачи сообщений* (Message Passing Interface, MPI). Результаты экспериментов показывают, что в том случае, когда число процессоров не слишком велико (порядка сотни) эффективность алгоритма достаточно велика (см. рис. 7), а при дальнейшем росте этого числа начинает падать.

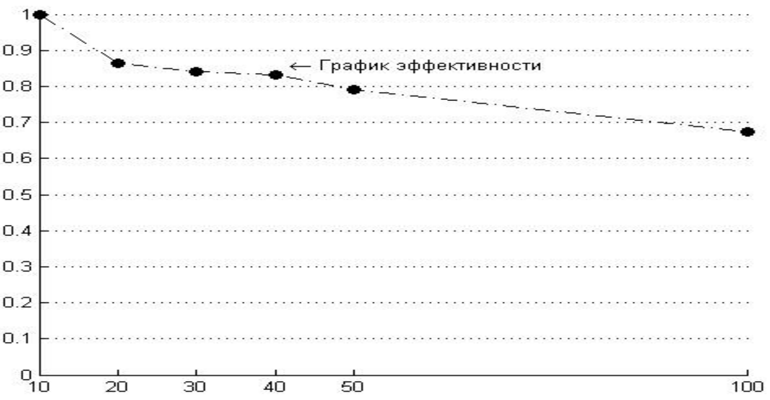

Рис. 7 График зависимости эффективности от числа процессоров

Описание комплекса программ аппроксимации ОЭП приведено в разделе 3.8. Программное обеспечение МСП, адаптированное к задаче оптимизации правил управления каскадом водохранилищ, было зарегистрировано в Федеральной службе по интеллектуальной собственности (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020663645 от 30 октября 2020 г.)

3 Основные результаты диссертации

1. Разработаны и исследованы численные методы аппроксимации ОЭП для нелинейных динамических многошаговых систем с критериями типа уровня обеспеченности, характеризуемыми большим числом локальных экстремумов;
2. На основе разработанных методов аппроксимации ОЭП реализована новая методика многокритериальной оптимизации управления многошаговой динамической системой с критериями типа уровня обеспеченности;
3. Разработана и включена в многошаговую балансовую модель каскада водохранилищ математическая модель правила управления каскадом и обоснована процедура вариантного расчета траекторий по заданным параметрам правила управления;
4. Разработаны и экспериментально исследованы численные методы оптимизации разрывных многоэкстремальных критериев типа уровня обеспеченности и их сверток; на основе этих методов предложена новая диалоговая итеративная человеко-машинная процедура решения задач многокритериальной оптимизации, не требующая глобальной оптимизации свертки критериев;
5. Разработано программное обеспечение; реализующее предложенные методы, которое использовано для решения задачи многокритериальной оптимизации правил управления Ангарским каскадом водохранилищ, включая регулирование уровня озера Байкал.

4 Публикации по теме диссертации

В изданиях из списка ВАК РФ

1. Рябиков А.И. О методе эрзац-функций для минимизации конечнозначной функции на компактном множестве // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2014, Т. 54, № 2, С. 195-207. [Ryabikov A.I. Ersatz Function Method for Minimizing a Finite-Valued Function on a

Compact Set // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2014, Vol. 54, No. 2, pp. 206-1218.] **(Scopus, WoS)**
2. Лотов А.В., Рябиков А.И., Бубер А.Л. Визуализация границы Парето при разработке правил управления ГЭС // Искусственный интеллект и принятие решений, 2013, № 1, С. 70-83. [Lotov A.V., Ryabikov A.I., Buber A.L. Pareto Frontier Visualization in the Development of Release Rules for Hydro Electrical Power Stations // Scientific and Technical Information Processing, 2014, Vol. 41, No. 5, pp. 314-324.] **(Scopus)**
3. Лотов А.В., Рябиков А.И. Многокритериальный синтез оптимального управления и его применение при построении правил управления каскадом гидроэлектростанций // Труды Института Математики и Механики УрО РАН, 2014, Т. 20, № 4, С. 187-203.
4. Березкин В.Е., Лотов А.В., Лотова Е.А., Рябиков А.И. Эксперименты с гибридными методами аппроксимации оболочки Эджворта-Парето // Труды Института системного анализа Российской академии наук, 2018, Том.68, №2, С. 8-11.
5. Бубер А.Л., Раткович Л.Д., Рябиков А.И. Имитационное моделирование водохозяйственных систем в режиме оптимизации диспетчерских правил управления на примере уникального природно-технического комплекса «озеро Байкал – Иркутское водохранилище» // Природообустройство, 2018, №3, С. 31-39.
6. Лотов А.В., Рябиков А.И., Бубер А.Л. Многокритериальная процедура выбора решения с наследуемым множеством точек старта локальной оптимизации свертки критериев // Искусственный интеллект и принятие решений, 2018, № 3, С. 58-68. [Lotov, A.V., Ryabikov, A.I., Buber, A.L. A Multi-Criteria Decision-Making Procedure with an Inherited Set of Starting Points of Local Optimization of the Scalarizing Functions // Scientific and Technical Information Processing, 2019, 46(5), pp. 328-336.] **(Scopus)**
7. Лотов А.В., Рябиков А.И. Простая эффективная гибридизация классической глобальной оптимизации и генетических алгоритмов многокритериальной оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2019, Т. 59. № 10. С. 1666-1680. [Lotov A.V., Ryabikov A.I. Simple Efficient Hybridization of Classic Global Optimization and Genetic Algorithms for Multiobjective Optimization // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2019, 59(10), pp. 1613-1625.] **(Scopus, WoS)**
8. Лотов А.В., Рябиков А.И. Метод стартовой площадки в многоэкстремальных задачах многокритериальной оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2019, Т. 59. № 12. С. 2111–2128. [Lotov A.V., Ryabikov A.I. Launch pad method in multiextremal multiobjective optimization problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2019, 59(12), pp. 2041-2056.] **(Scopus, WoS)**
9. Buber, A.L., Lotov, A.V., Ryabikov A.I. Pareto frontier visualization in multi-objective water resources control rules development problem for the Baikal Lake and the Angara River cascade // 1st IFAC Workshop on Control Methods for Water Resource Systems, IFAC-PapersOnLine, 52(23) , 2019, pp. 9-16 **(Scopus)**.
10. Рябиков А.И. Сходимость итерационных процессов в модели каскада водохранилищ // Вестник Бурятского ГУ. Математика, информатика. 2019. №4. С. 31-39.

В сборниках трудов конференций

11. Рябиков А.И. Эксперименты с двухфазным методом нелинейной многокритериальной оптимизации на многопроцессорных системах // Труды V Московской межд. конф. по исследованию операций (Москва, 10-14 апреля 2007). М. 2007. С. 68-69.

12. Рябиков А.И. Реализация двухфазного метода нелинейной многокритериальной оптимизации на суперкомпьютере // Труды IV Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование развивающейся экономики и экологии» (Экомод-2009, Киров, 6-12 июля 2009 г.). Киров. 2009. С. 395-401.
13. Бубер А.Л., Лотов А.В., Рябиков А.И. Разработка правил управления ГЭС с использованием визуализации границы Парето // Труды VI Московской межд. конф. по исследованию операций (Москва, 19-23 октября 2010). М. 2010. С. 178-180.
14. Рябиков А. И. О масштабируемости параллельных многофазных методов нелинейной многокритериальной оптимизации // Труды VI Московской межд. конф. по исследованию операций (Москва, 19-23 октября 2010). М. 2010. С. 194-196.
15. Каменев Г.К., Лотов А.В., Рябиков А.И. Использование параллельных вычислений при аппроксимации многомерной границы Парето в задачах многокритериальной оптимизации // Труды V Международная конференция "Параллельные вычисления и задачи управления" PACO'2010 (Москва, 26-28 октября 2010 г.). 2010. С. 241-263.
16. Lotov A.V., Riabikov A.I. Multi-criteria design of control rules for nonlinear dynamic problems by using visualization of the Pareto frontier // Abstracts of the 2nd Int. Conf. Optimization and Applications (Optima-2011). M. 2011. pp. 157-159.
17. Лотов А.В., Рябиков А.И. Решение многокритериальных задач синтеза управления на основе визуализации границы Парето // Труды VI Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование развивающейся экономики, экологии и биотехнологий» (Экомод-2011, Киров, 27 июня – 3 июля 2011). Киров. 2011. С. 253-260.
18. Болгов М.В., Бубер А.Л., Коробкина Е.А., Лотов А.В., Рябиков А.И. Об оценке надежности ангарской водохозяйственной системы // Труды Всероссийской научной конференции «Вода и водные ресурсы: системообразующие функции в природе и экономике» (Цимлянск, 23-28 июля 2012). Новочеркасск. 2012. С. 375-381.
19. Рябиков А.И. Применение метода прокси-критериев в задаче многокритериальной оптимизации с конечнозначными критериями // Труды VII Московской межд. конф. по исследованию операций (ORM2013, Москва, 15-19 окт. 2013). М. 2013. Т. 2. С. 67-68.
20. Lotov A.V., Ryabikov A.I. Pareto Frontier Visualization in Developing the Control Rules for Angara River Basin // Proceedings of VII Int. Conf. «Optimization and Applications» OPTIMA-2016 (Petrovac, Montenegro, Sept. 25 – October 2, 2016). Moscow. 2016. P. 101.
21. Лотов А.В., Рябиков А.И. Многокритериальный подход к построению правил управления каскадом ГЭС // Труды VIII Московской межд. конф. по исследованию операций (ORM2016, Москва, 17-22 октября 2016). М. 2016. Т. 2. С. 76-77.
22. Лотов А.В., Рябиков А.И. Построение правил управления каскадом ГЭС на основе визуализации границы Парето // Труды IX Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование развивающейся экономики, экологии и биотехнологий» ЭКОМОД-2016. Киров. 2016. С. 316-317.
23. Lotov A.V., Ryabikov A.I. Injection of optimal solutions in population of a genetic algorithm for Pareto frontier approximation // Proceedings of VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM 2018). Moscow. 2018. Vol. 1. pp. 111-115.
24. Lotov A.V., Ryabikov A.I. Approximation of multi-dimensional Edgeworth-Pareto Hull in non-linear multi-objective problems // Proceedings of the 9th International Conference, NUMGRID 2018 / Voronoi 150 (Moscow, Russia, December 2018). Lecture Notes in Computational Science and Engineering. 2019. Vol. 131. pp. 127-138 (Scopus).