О Т З Ы В

официального оппонента на диссертационную работу А.Ю. Морозова «Моделирование динамических систем с интервальными параметрами», представленную на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.2.2 «математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Предметом диссертационной работы А.Ю. Морозова является развитие методов математического моделирования динамических систем с неопределёнными и неточными параметрами, которые описываются интервалами их возможных значений. В целом, диссертация посвящена разработке новых методов интервального анализа и интервальных вычислений, их реализации на ЭВМ и решению с помощью нового инструментария конкретных практических задач. Таким образом, тематика диссертации и изложенный в ней материал полностью соответствуют паспорту заявленной специальности.

Для меня несомненна также актуальность тематики диссертационной работы, посвящённой моделированию систем с неточностями и неопределённостями, которые описываются средствами интервального анализа. Традиционное теоретико-вероятностное описание неопределённостей обладает рядом принципиальных недостатков, которые делают невозможным его применение во многих технических задачах, тогда как более скупое и «неприхотливое» интервальное описание часто вполне доступно. Опираясь на него, можно и нужно строить математические модели интересующих нас процессов и явлений, исследовать и применять их. Как следствие, необходимо развитие соответствующих методов интервального анализа.

Согласно одному из популярных определений (которого придерживаюсь и я сам), интервальные вычисления — это просто вычисления с интервалами, как специфическим типом данных. Это очень общее определение, под которое подпадают самые различные типы и способы вычислений, имеющие разнообразные цели и назначение. В частности, интервальные вычисления могут быть как *доказательными*, так и *недоказательными*. В доказательных вычислениях (термин К.И. Бабенко) для интервального результата гарантируется включение идеального математического результата, если исходные данные содержат истинные значения рассматриваемых величин (т. е. являются «накрывающими», «включающими» и пр. согласно современной терминологии). Иными словами, если выражаться более образно, это вычисления «с гарантированным результатом». Напротив, в недоказательных интервальных вычислениях результат не обязательно удовлетворяет этому ценному свойству, но всё-таки выдаваемые ими ответы приближают идеальные математические результаты, так что эти вычисления можно (и нужно) также использовать для целей математического моделирования. До конца XX века, в основном под влиянием развития интервальных вычислений в Германии, признавались лишь доказательные вычисления с интервалами (они обозначались терминами verified computations, validated computing и т. п.). Но потом постепенно пришло осознание ценности недоказательных интервальных вычислений, так как их игнорирование наносило большой ущерб развитию и приложениям интервального анализа вообще. По этой классификации диссертация А.Ю. Морозова посвящена развитию интервальных вычислений, которые не являются доказательными, но всё-таки помогают решению различных практических задач.

Диссертационная работа А.Ю. Морозова производит солидное положительное впечатление своими массогабаритными характеристиками, но и её внутреннее наполнение также весьма похвально. Соискатель берётся за трудную задачу численного моделирования динамических систем с интервальными параметрами, которая была и остаётся предметом внимания многих именитых специалистов, и достигает в решении этой задачи новых и перспективных результатов. В частности, в соавторстве с научным консультантом им предложен, исследован и доведён до работоспособных компьютерных программ так называемый интерполяционный подход к построению множеств достижимости дифференциальных уравнений с интервальной неопределённостью в параметрах.

Фактически, ценой отказа от доказательности (гарантированности) интервальных вычислений получены очень хорошие результаты по исследованию поведения динамических систем с неопределёнными параметрами. В частности, путём аккуратного отслеживания множеств достижимости соискателю удаётся до определённой степени преодолевать паразитный «эффект обёртывания», от которого страдают почти все интервальные численные методы для решения дифференциальных уравнений (соискатель кое-где называет его устаревшим русским термином «эффект Мура»).

Результаты первых глав диссертации служат затем основой для развиваемой соискателем методики идентификации систем по интервальным экспериментальным данным (глава 5).

Ещё одной сильной стороной диссертационной работы А.Ю. Морозова является компьютерная реализация, доведение «до числа» большинства из предложенных теоретических конструкций. Этому посвящена глава 6 диссертации, где можно увидеть результаты решения таких важных задач математического моделирования, как исследование бифуркационного поведения динамических систем, моделирование химических реакций с неточными параметрами, моделирование движения астероида и другие.

Как итог констатирующей части своего отзыва могу резюмировать, что А.Ю. Морозовым выполнен очень большой объём работ и получены ценные результаты, которые существенно продвигают технику и инструментарий интервального анализа.

Перейдём теперь к недостаткам диссертации. Помимо мелких технических огрехов текста, на которых я не хочу рассеивать ваше внимание, работа А.Ю. Морозова имеет, на мой взгляд, несколько более крупных нестыковок и оплошностей, а также два недостатка методологического характера.

Прежде всего, отмечу тот странный факт, что система обозначений диссертации А.Ю. Морозова, посвящённой методам интервального анализа, не соответствует неофициальному стандарту на обозначения в интервальном анализе, который был выработан уже 20 лет назад и вполне признан международным сообществом специалистов. Последняя версия этого документа опубликована в виде статьи

> Kearfott R.B., Nakao M., Neumaier A., Rump S., Shary S.P., van Hentenryck P. Standardized notation in interval analysis // *Вычислительные Технологии.* — 2010. — Том 15, №1. — С. 7-13

(доступно по ссылке http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=1345). Согласно этому стандарту интервалы и интервальные величины обозначаются буквами жирного математического шрифта, который к концу XX века высвободился от обозначения векторных величин. В соответствии с этой системой обозначений оформлены, в частности, действующие стандарты на интервальные вычисления на ЭВМ — IEEE 1788-2015 и IEEE 1788.1-2017.

Кроме того, хочу посоветовать А.Ю. Морозову сменить неоднозначный термин «область неопределённости параметров», который используется в диссертации в нескольких значениях, на более короткий и ёмкий термин «информационное множество» в применении к области параметров, которые совместны (согласованы и пр.) с интервальными данными задачи. Этот термин был предложен А.Б. Куржанским ещё в конце 80-х годов прошлого века, см.

> Куржанский А.Б. Задача идентификации — теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. — 1991. — №1. — С. 3-26.

(электронная версия статьи доступна на https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid=4149). В настоящее время «информационное множество» вполне апробировано и является более предпочтительным вариантом словоупотребления.

Главный недостаток диссертации А.Ю. Морозова — недостаточная проработка ряда тонких методических вопросов интервальных вычислений, которая выливается в неполноту развиваемых им вычислительных технологий. Более точно, это некритичное смешение различных типов данных, вещественных (точечных) и интервальных, а также соответствующих им уровней рассмотрения предмета.

Для пояснения этого момента зафиксируем следующий фундаментальный факт: интервалы и другие интервальные величины являются объектами, находящимися на более высоком уровне абстракции по сравнению с вещественными числами, векторами и матрицами (точечными величинами). Интервалы получаются как множества чисел, а сами по себе, вне образующих их чисел, — являются экзотическими и не очень полезными объектами. Фактически, просто парами чисел. Это вызвано тем обстоятельством, что в окружающем нас мире почти все физические, химические, биологически и прочие законы оперируют традиционными типами данных — целым и вещественным. Все шкалы измерительных приборов, все бухгалтерские и финансовые расчёты и т. д. и т. п. привлекают только числовые — целые и вещественные величины. Интервальный тип данных образуется уже на более высоком уровне рассмотрения и абстракции, когда мы агрегируем числа в какие-то составные объекты и хотим с ними оперировать, как с целостными сущностями. Для тех, кому мои рассуждения кажутся схоластическими и оторванными от реальной жизни, рекомендую представить ситуацию, когда его зарплата вдруг сделалась интервальной величиной, и как он после этого собирается её получать и жить с ней, к примеру, ходить по магазинам и рассчитываться по различным счетам.

Таким образом, выражение «интервальный параметр» является лишь удобной фигурой речи, означающей «интервал значений параметра», и это, в частности, верно во всех задачах, рассматриваемых в диссертации.

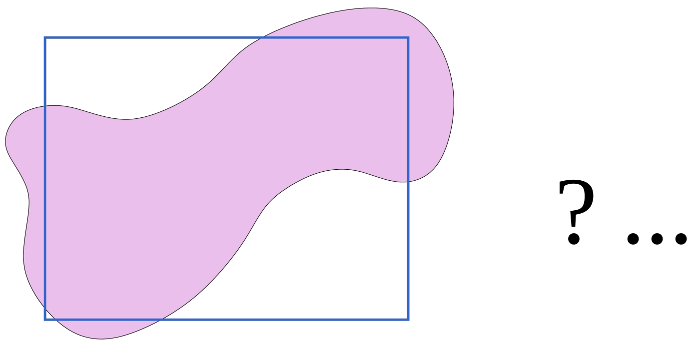
Но когда мы применяем для решения интересующих нас задач методы интервального анализа, то, как правило, отвлекаемся от составного характера интервальных величин и их места в иерархии математических объектов, формально применяя правила исчисления интервалов, каких-то операций между ними, как новыми самостоятельными объектами, и т. п. Но как соотносятся результаты такого интервального решения задачи с множеством результатов точечных задач, которое обычно только и интересует нас по условию исходной постановки? Это нетривиальный вопрос, несмотря на его кажущуюся простоту. Очевидный ответ на него в том виде, что получаемый интервал содержит числа, которые являются решениями точечных задач — неточен и часто неверен, как показывают уже простейшие примеры.

Рассмотрим, в частности, интервальное уравнение $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ с интервалами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Несложно выписать его *формальное решение*, т. е. такой интервал $\boldsymbol{x}$, что его подстановка в уравнение и выполнение операций по правилам интервальной арифметики приводит к истинному равенству. Но что оно означает в терминах вещественных чисел из интервалов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$? Ведь мы выписываем интервальное уравнение, как совокупность обычных точечных уравнений, решения которых нам интересны по условиям реальной постановки задачи. И формальное решение интервального уравнения отнюдь не даёт ни множество всевозможных решений уравнений $x + a = b$ с $a \in \boldsymbol{a}$ и $b \in \boldsymbol{b}$, ни его оценку. Сейчас ответ на рассматриваемый вопрос нам всем известен, он часто используется в интервальных вычислительных технологиях, а сам предмет хорошо разработан, но для построения этой небольшой теории и создания подходящей понятийной базы потребовалась пара десятилетий. Аналогично и с другими «интервальными решениями» различных задач.

Если для иллюстрации проблемы прибегнуть к выписанной выше картине о разных уровнях абстракции в интервальном анализе, то можно сказать, что для полноценного и корректного решения задачи нужно уметь сначала подняться с уровня точечных постановок задач (которые только и имеют смысл в силу существующей физической картины мира) на уровень интервальный, а потом, получив нечто в виде решения интервальными методами, суметь опуститься, с сохранением содержательного смысла, обратно в эти самые точечные постановки. К сожалению, второй этап в некоторых местах работы А.Ю. Морозова «завален». Соискатель как будто считает его самоочевидным, но это далеко не так.

Рассмотрим, к примеру, Главу 5 диссертации, посвящённую идентификации параметров динамических систем. В разделе 5.2 соискатель рассматривает параметрическую идентификацию на основе внешних интервальных оценок фазовых переменных. Для нахождения «интервальных оценок» параметров сразу же выписывается условие минимизации функционалов качества (5.4), (5.20) и (5.43), в котором с самого начала фигурируют «интервалы оценок». Но полученные таким образом интервалы не поставишь, например, в настройки систем управления, не сформируешь из них управляющее воздействие на систему и т. п. Во всех таких ситуациях требуются конкретные числовые значения. Совершенно аналогично, во многих других ситуациях заказчику требуются именно точечные значения параметров, с которыми только и можно работать на практике. Вопрос: откуда следует, что эти полученные в результате минимизации функционалов (5.4), (5.20) и (5.43) интервалы в самом деле содержат точечные значения параметров, совместные (согласующиеся и т. п.) с интервальными данными? Никаких пояснений, выкладок, доказательств на этот счёт соискатель не приводит, хотя используемый им по умолчанию ответ (состоящий в том, что полученные интервалы содержат точечные значения параметров) никак не обоснован.

То, что множество всех значений параметров системы, совместных (согласующихся и т. п.) с интервальными экспериментальными данными (т. е. информационное множество задачи), не вполне совпадает с получаемыми в диссертации интервальными оценками, следует хотя бы из несовпадения их форм. Информационное множество в общем случае может иметь сложную форму и строение, будучи пятном, растёкшейся кляксой, невыпуклым многогранником или чем-то похожим в пространстве параметров (см., например, характерные рисунки в диссертации). Но А.Ю. Морозов всегда получает в результате своей идентификации брус с гранями, параллельными координатным осям.



Как следствие, либо результирующая интервальная оценка содержит точки, не принадлежащие информационному множеству, либо информационное множество содержит точки, не принадлежащие интервальной оценке, либо одновременно верно и то, и другое (см. рисунок выше). В этих условиях естественно спросить: в каком же отношении полученный брус интервальной оценки находится к информационному множеству? Может быть, кто-то в кого-то включается, или это верно для интервальных оболочек рассматриваемых множеств и т. п.? Это важнейшие вопросы, которые в диссертации никак не рассматривается, и неочевидный ответ на них даётся как бы по умолчанию.

В современном интервальном анализе связь результатов интервальных методов с результатами решения точечных задач, имеющих данные в пределах рассматриваемых интервалов, либо является следствием монотонности по включению в интервальных арифметиках, либо устанавливается отдельными предложениями об интерпретации, как, например, это делается в формально-алгебраическом подходе. Чего-то аналогичного не хватает исследованиям А.Ю. Морозова.

Ещё один способ придать осмысленность конструкциям главы 5 может состоять в том, чтобы объявить интервальные данные ненакрывающими и, как следствие, не ожидать от результатов их обработки каких-либо гарантированных отношений с информационным множеством. Напомню, что понятия накрывающих и ненакрывающих интервальных данных (в частности, результатов измерений) были введены автором этих строк около 2021 года с целью разграничения различных интервальных методов обработки данных и наведения в этой сфере элементарного порядка в многочисленных идеях, конструкциях, подходах и приёмах. Если коротко, то накрывающие (включающие) интервальные данные — это данные, гарантированно содержащие истинные значения интересующих нас величин. Для ненакрывающих интервальных данных мы не можем гарантировать этого включения, а потому они воспринимаются как интервальные «болванки», какие-то целостные объекты, не имеющие внутренней структуры. Относительно их элементов-точек говорить о полном удовлетворении условиям задачи большого смысла не имеет.

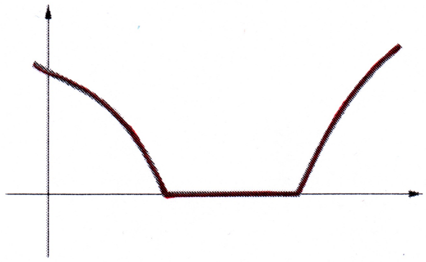
Наиболее быстрый способ ознакомиться с этими понятиями — прочитать свежую книгу

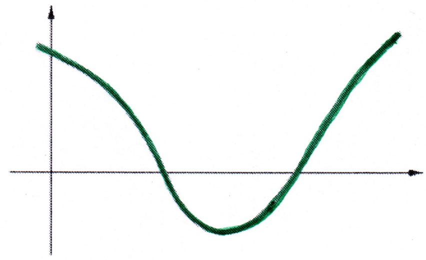
Баженов А.Н., Жилин С.И., Кумков С.И., Шарый С.П.
Обработка и анализ интервальных данных. – Москва-Ижевск:
Изд-во «Институт компьютерных исследований», 2024, 355 стр.

(см. подробности на https://shop.rcd.ru/catalog/intervalnyy-analiz-i-ego-prilojeniya/19592/) или посмотреть доклад автора «Enclosing vs. non-enclosing measurements in interval data processing» на веб-семинаре д-ра А. Рау по интервальным методам в управлении (см. https://www.interval-methods.de/seminars). Там же в книге, в разделе 4.16, даются примеры того, насколько различными могут быть ответы в задачах обработки накрывающих и ненакрывающих интервальных данных. В принципе, соискатель должен был бы знать все эти тонкости в 2024 году.

Этот второй способ является, на мой взгляд, даже более предпочтительным, так как совершенно отвечает духу и букве построений А.Ю. Морозова в диссертационной работе. Так или иначе, у меня также сложилось впечатление, что получаемые А.Ю. Морозовым в главе 5 диссертации вполне разумные результаты идентификации по интервальным данным обязаны тому факту, что построенные численные процедуры удовлетворяют «принципу соответствия» — расширенному варианту знаменитого боровского принципа (см. цитированную выше книгу). Поэтому при не очень большой ширине интервальных данных они дают ответы, не слишком сильно отклоняющиеся от идеальных и тех, что обеспечиваются «накрывающими» методиками. При более тонком анализе задач идентификации, решаемых соискателем можно ожидать, что неизбежно выявятся отличия в результатах с подходами, существенно эксплуатирующими накрывающий характер обрабатываемых данных.

Наконец, последнее. Форма целевых функционалов качества (5.4), (5.20) и (5.43), которые применяются соискателем в главе 5 для решения задач идентификации параметров, весьма невыгодны, так как для них характерны плато нулевого уровня (см. рисунок ниже слева). Это вызвано тем, что основой для построения целевых функционалов выбрана функция расстояния от точки до множества или ей аналогичная, в которой берётся минимум расстояний от заданной точки до точек из некоторых множеств.





Конфигурация целевой функции, похожая на ту, что изображена на рисунке выше справа, когда экстремум не находится на плато и отделён от нуля, гораздо более выгодна и даже более информативна при решении различных задач. Она позволяет надёжнее выявить точки информационного множества, позволяет с помощью знака и абсолютной величины значений целевого функционала различать это точки по «степени принадлежности» информационному множеству. При благоприятных условиях она помогает даже различать точки границы и внутренности информационного множества.

Тем не менее, несмотря на высказанные выше замечания и критику, я считаю в целом, что Александр Юрьевич Морозов выполнил достойную исследовательскую работу, удовлетворяющую требованиям ВАК России. Хороших, чётких и добротно проработанных результатов в ней гораздо больше, чем того, что может вызвать какие-то вопросы. Диссертация является большим целостным исследованием, результаты которого дают право присвоения соискателю учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.2.2 «математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник
лаборатории анализа и оптимизации нелинейных систем
Федерального исследовательского центра
информационных и вычислительных технологий

С.П. Шарый

19 марта 2024 года

Сергей Петрович Шарый
Федеральный исследовательский центр
информационных и вычислительных технологий
просп. акад. Лаврентьева, 6
630090 г. Новосибирск
Электронный адрес — **shary@ict.nsc.ru**
Телефон — (383) 330-86-56

ВЕРНО
Зав. канцелярией
Семенова Е.Б.