

Федеральное государственное учреждение  
«Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»  
Российской академии наук» (ФИЦ ИУ РАН)

Принято секцией Ученого совета  
ФИЦ ИУ РАН, протокол № \_\_\_\_\_  
от «    » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ г.

УТВЕРЖДАЮ  
Директор ФИЦ ИУ РАН

\_\_\_\_\_ И.А.Соколов  
«    » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ г.

ПРОГРАММА-МИНИМУМ  
КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА  
по профилю (направленности) 01.01.07  
«Вычислительная математика»  
по физико-математическим наукам

## Введение

В основу настоящей программы положены следующие дисциплины: функциональный анализ; уравнения математической физики; численные методы. Программа разработана экспертным советом Высшей аттестационной комиссии по математике и механике при участии Института вычислительной математики РАН, Московского Государственного Университета им. М. В. Ломоносова и Института прикладной математики.

### 1. Функциональный анализ

*Метрические, нормированные, гильбертовы пространства.*

Метрические пространства. Непрерывные отображения. Компактные множества.

Принцип сжатых отображений, методы последовательных приближений и их приложения. Линейные, нормированные, банаховы и гильбертовы пространства.

Сильная и слабая сходимости. Задача о наилучшем приближении. Наилучшее равномерное приближение. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.

*Линейные функционалы и операторы.*

Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора.

Сходимость операторов; ряд Неймана и условия его сходимости. Теоремы о существовании обратного оператора. Мера обусловленности линейного оператора и ее применение при замене точного уравнения (решения) приближенным.

Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Теорема Банаха-

Штейнгауза и ее приложения. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала (для гильбертова пространства). Спектр оператора. Сопряженные, симметричные, самосопряженные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их спектральные свойства. Вариационные методы минимизации квадратичных функционалов, решения уравнений и нахождения собственных значений (методы Ритца, Бубнова-Галеркина, наименьших квадратов).

Дифференцирование нелинейных операторов, производные Фреше и Гато. Метод Ньютона, его сходимость и применение.

*Пространства функций  $C$ ,  $L_2$ ,  $L_p$ ,  $W_p^l$ .*

Обобщенная производная. Неравенства Пуанкаре-Стеклова-Фридрихса. Понятие о теоремах вложения.

## 2. Задачи математической физики

*Математические модели физических задач.*

Математические модели физических задач, приводящие к уравнениям математической физики. Основные уравнения математической физики; постановки задач. Корректно и некорректно поставленные задачи.

*Обобщенное решение краевых задач для эллиптических уравнений.*

Дивергентная форма записи эллиптического оператора. Понятие об обобщенном решении. Основные свойства гармонических функций (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума). Фундаментальное решение и функция Грина для уравнения Лапласа.

*Задача Коши.*

Задача Коши для уравнения теплопроводности и уравнения колебаний (в одномерном и многомерном случаях).

Фундаментальные решения. Характеристики.

Понятие об обобщенных решениях. Обобщенные решения смешанных задач для уравнений параболического и гиперболического типов; существование, единственность и непрерывная зависимость от данных задачи. Теорема Стеклова о разложении в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля.

### **3. Численные методы**

*Численные методы алгебры.*

Прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений с полными матрицами и матрицами специального вида. Одношаговые итерационные методы.

Чебышевские одношаговые итерационные методы. Оптимальный набор чебышевских параметров и вычислительная устойчивость. Трехчленные (двушаговые) чебышевские итерационные методы. Методы спуска и метод сопряженных градиентов.

*Приближение функций.*

Общие свойства систем ортогональных многочленов. Многочлены Лежандра и Чебышева; их свойства и приложения. Интерполяционные многочлены. Выбор узлов интерполяции.

Быстрое дискретное преобразование Фурье. Интерполяция нелокальными и локальными сплайнами.

*Численное интегрирование.*

Интерполяционные квадратурные формулы. Задача оптимизации квадратуры. Квадратурные формулы типа Гаусса. Многомерные квадратурные формулы. Понятие о методе Монте-Карло. Интегрирование сильно осциллирующих функций.

*Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Численные методы решения задачи Коши и краевых задач. Оценка погрешности, сходимость и устойчивость. Методы прогонки и стрельбы. Разностные схемы для решения дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Понятие о жестких системах обыкновенных дифференциальных уравнений и методах их решения.

*Разностные и вариационно-разностные методы решения уравнений математической физики.*

Основные понятия (аппроксимация, устойчивость, сходимость). Методы построения разностных схем (метод сеток, интегро-интерполяционный метод, метод аппроксимации интегральных тождеств, вариационно-разностные и проекционно-разностные методы, метод Галеркина, метод конечных элементов, метод аппроксимации квадратичного функционала); их применение к решению краевых и начально-краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. Оценка порядка аппроксимации и сходимости. Двухслойные и трехслойные схемы; их устойчивость.

Экономичные методы решения нестационарных многомерных задач. Методы решения нелинейных уравнений (теплопроводности и газовой динамики). Дивергентные и монотонные разностные схемы. Схемная и искусственная вязкость.

*Методы решения сеточных уравнений.*

Прямые методы (прогонки, быстрого дискретного преобразования Фурье, циклической редукции). Метод последовательной верхней релаксации, неявные схемы с эквивалентными по спектру операторами, попеременно-треугольный метод. Методы расщепления и переменных направлений. Понятие о методе Федоренко. Оценки скорости сходимости.

*Методы решения обратных и некорректных задач.*

Применение методов регуляризации, минимизации сглаживающего функционала и итерационных методов для решения вырожденных, несовместных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений и интегральных уравнений первого рода.

**Основная литература**

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Изд.6-е. М.: МГУ, 1999.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
3. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
4. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. Изд.4-е. М.: Физматлит, 2000.
5. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
6. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Наука,
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1982.
8. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Физматлит, 2001.
9. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
10. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. Изд.2-е. М.: Наука, 1977.
11. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
12. Денисов А.М. введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994.

**Дополнительная литература**

1. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
2. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.